105 年專技高考土木技師 考試試題

類科：土木技師
科目：工程測量 (含)平面測量與施工測量

甲、申論題部分

一、距離測量中，「海平面歸化改正」（correct for reduction to sea level）之改正原因與目的為何？又如何進行？本項改正與橢圓球的關聯為何？並請以相對精度為規範要求探討改正量之顯著程度。請列舉假定地球為一圓球時之化算公式，並以文字配合圖形說明。（25 分）

【擬答】

㈠「海平面歸化改正」之改正原因與目的：

若距離測量處，較海平面高出（或低出）甚多，則應加海平面歸化改正。

1. 原因：

一個點在空間的位置，需要三個量來確定。在測量工作中，這三個量通常用該點在基準面上的投影位置，以及該點沿投影方向到基準面的距離來表示。二個點位之間的距離，應以二個點位在基準面上的投影位置，計算得到距離；或是在不同高程觀測的距離，再化算到基準面的距離。因為未知點在基準面上的投影位置是未知的，因而採用先觀測距離再化算的方式。一般實用上，是以大地水準面（平均海水面）作為基準面。

2. 目的：

將不同高程位置的距離觀測值，化算到位於平均海水面（Mean Sea Level, M.S.L）的距離。

㈡進行方式

1. 觀測 A、B 二點的水平距離 L。如觀測 A、B 二點的斜距時，應先計算為水平距離。

2. 獲得或是計算 A、B 二點的高程。

3. 先計算其他的改正項目：尺長改正、傾斜改正、溫度改正、拉力改正、懸垂改正

4. 再計算海平面歸化改正。

5. 原距離 L 加上各項改正值，得到改正後距離。

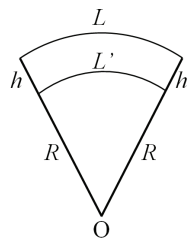
㈢本項改正與橢圓球的關聯

理論上，距離應該投影到「參考橢球面」。但因「參考橢球面」與「大地水準面」之差值，也就是「大地起伏 N」並不大。臺灣地區的大地起伏約為 18 至 28 公尺，與地球半徑 6371 公里相比較，大地起伏是很小的，因而以「大地水準面」作為化算的基準面。

在正高系統，也是以「大地水準面」作為基準面。因此，高程與距離有相同的基準面。

㈣假定地球為一圓球時之化算公式

假設：在高程 h 的距離觀測值 L，投影到平均海水面的距離為 L'。



$$\because \frac{L'}{R}=\frac{L}{R+h} \qquad \therefore L'=L\times\frac{R}{R+h}$$

海平面歸化改正 CR：$CR=L'-L=L\times\frac{R}{R+h}-L=-L\times\frac{h}{R+h}$

式中；h：距離觀測位置的高程。R：地球半徑（6371 公里）。

㈤以相對精度為規範要求，探討改正量之顯著程度

設；相對精度=$\frac{|C_R|}{L'}=\frac{L\times\frac{h}{R+h}}{L\times\frac{R}{R+h}}=\frac{h}{R}=\frac{1}{\frac{R}{h}}$

當距離觀測量=100 公尺（0.1 公里）時，相對精度=$\frac{1}{\frac{6371}{0.1}}=\frac{1}{63710}$

當距離觀測量=127 公尺（0.127 公里）時，相對精度=$\frac{1}{\frac{6371}{0.127}}=\frac{1}{50165}$

亦即；當精度要求超過 1/50000 以上時，海平面歸化改正量具有相當的顯著程度。

二請以文字配合圖形解釋經緯儀「指標差」（index error）發生之原因與消除之方法。水平角與垂直角是否均有「指標差」？並請以計算公式說明「指標差」與度盤刻劃方式及零點方向之關係。雷射掃描儀（laser scanner）是否有指標差的問題？（25 分）

【擬答】

㈠經緯儀「指標差」發生之原因與消除之方法

1. 發生原因：

當經緯儀望遠鏡水準器水平時(視準軸水平時)，垂直角讀數應為 0°(或 90°，天頂距式)，若非正為 0°(或 90°)時，此時讀數與 0°(或 90°)之間的差值，謂之「指標差」。

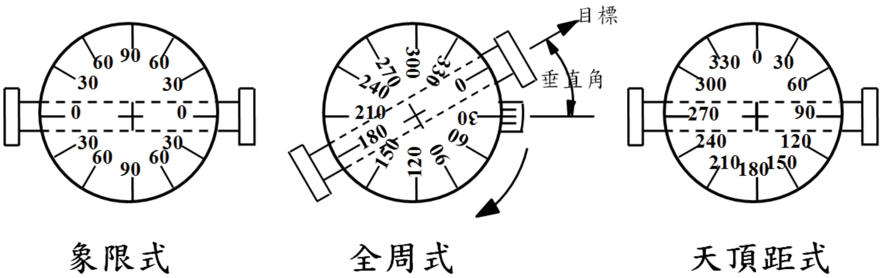
2. 消除方法：正、倒鏡觀測取平均值。

㈡水平角與垂直角是否均有「指標差」

垂直角觀測具有「指標差」。水平角觀測不具有「指標差」。

㈢「指標差」與度盤刻劃方式及零點方向之關係

垂直角讀數方法，按垂直度盤構造之不同，可分為：



*1.*象限式：水平方向正鏡 0°，倒鏡 0°

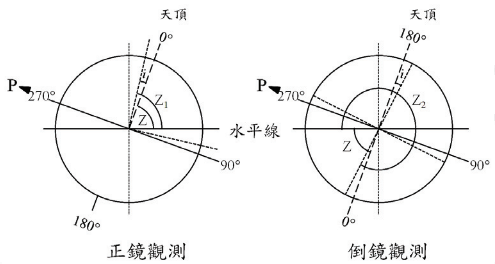
如正鏡讀數 α1，倒鏡讀數 α2，則垂直角 $\alpha=\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ 指標差 $i=\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$

*2.*天頂距式：度盤 0°在天頂，水平方向正鏡 90°，倒鏡 270°。

正鏡觀測：含指標差 i 之天頂距讀數 Z1，正確的天頂距讀數 Z，則 $Z_1=Z+i$

倒鏡觀測：含指標差 i 之天頂距讀數 Z2，正確的天頂距讀數 Z，則 $Z_2=360^\circ-Z+i$

則天頂距 $Z=\dfrac{1}{2}(Z_1+360^\circ-Z_2)$ 指標差 $i=\dfrac{1}{2}(Z_1+Z_2-360^\circ)$



*3.*全圓周式：水平方向正鏡 0°，倒鏡 180°

仰角時(正鏡近 0°)：垂直角 $\alpha=\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+90^\circ$ 指標差 $i=90^\circ-\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$

俯角時(正鏡近 360°)：垂直角 $\beta=90^\circ-\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$ 指標差 $i=270^\circ-\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

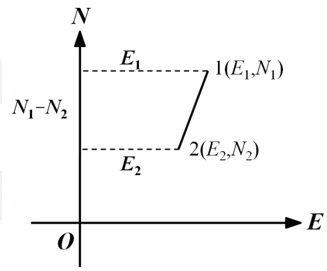
㈣雷射掃描儀是否有指標差的討論

光達（LiDAR）結合雷射掃描系統（內含雷射掃描儀、接收器）、全球定位系統（GPS）及慣性導航系統（INS）。地面光達的掃描方式，不論是橫掃式或是縱掃式，均會觀測點雲的水平角與垂直角，因此，雷射掃描儀是有指標差。

三請以文字配合圖形說明「倍橫距法面積計算」的原理及常用公式。如果計算面積為負值，請原因為何？並請以一三角形為例探討計算所得面積不確定度（uncertainty）與坐標值不確定度之間的傳播關係。（25 分）

【擬答】

㈠「倍橫距法面積計算」的原理及常用公式



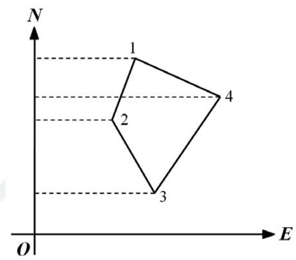
1. 單一梯形公式：如圖

假設：平面上任意二點坐標為 1(E1,N1)，2(E2,N2)

梯形面積 A=(上底+下底)*高/2

$A=\frac{1}{2}(E_1+E_2)(N_1-N_2)$

2. 多邊形公式：如圖



假設：平面上任意四點，依逆時針方向，其坐標次序為

1(E1,N1)，2(E2,N2)，3(E3,N3)，4(E4,N4)

$A_1=\frac{1}{2}(E_1+E_2)(N_1-N_2)$ $A_2=\frac{1}{2}(E_2+E_3)(N_2-N_3)$

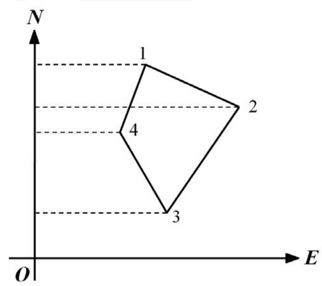
$A_3=\frac{1}{2}(E_3+E_4)(N_4-N_3)$ $A_4=\frac{1}{2}(E_4+E_1)(N_1-N_4)$

多邊形面積 $A=A_3+A_4-A_1-A_2$ 亦即

$$A=\tfrac{1}{2}(E_2+E_1)(N_2-N_1)+\tfrac{1}{2}(E_3+E_2)(N_3-N_2)+\tfrac{1}{2}(E_4+E_3)(N_4-N_3)+\tfrac{1}{2}(E_1+E_4)(N_1-N_4) \quad ..(1)$$

∴多邊形面積：$A=\frac{1}{2}\left|\sum(D.M.D\times \text{縱距})\right|=\frac{1}{2}\left|\sum(E_{i+1}+E_i)(N_{i+1}-N_i)\right|$

㈡計算面積為負值之原因



如右圖，多邊形點位依據順時針方向旋轉，其計算所得的面積為負值。茲分析如下：

$A_1=\frac{1}{2}(E_1+E_2)(N_1-N_2)$ $A_2=\frac{1}{2}(E_2+E_3)(N_2-N_3)$

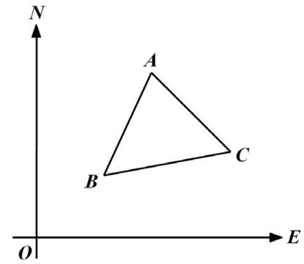
$A_3=\frac{1}{2}(E_3+E_4)(N_4-N_3)$ $A_4=\frac{1}{2}(E_1+E_4)(N_1-N_4)$

多邊形面積 $A'=A_1+A_2-A_3-A_4$ 亦即

$$A'=\tfrac{1}{2}(E_1+E_2)(N_1-N_2)+\tfrac{1}{2}(E_2+E_3)(N_2-N_3)-\tfrac{1}{2}(E_3+E_4)(N_3-N_4)-\tfrac{1}{2}(E_4+E_1)(N_4-N_1)$$

與(1)式比較，得 $A'=-A$

㈢面積不確定度與坐標值不確定度之間的傳播關係，以一個三角形為例，假設：任意三角形的三個頂點坐標為



$A\left(E_A \pm \sigma_{E_A}, N_A \pm \sigma_{N_A}\right)$、$B\left(E_B \pm \sigma_{E_B}, N_B \pm \sigma_{N_B}\right)$、

$C\left(E_C \pm \sigma_{E_C}, N_C \pm \sigma_{N_C}\right)$

倍橫距法面積計算公式：

面積 S：

$$S=\tfrac{1}{2}(E_B+E_A)(N_B-N_A)+\tfrac{1}{2}(E_C+E_B)(N_C-N_B)+\tfrac{1}{2}(E_A+E_C)(N_A-N_C)$$

$$\frac{\partial S}{\partial E_A}=\tfrac{1}{2}(N_B-N_A)+\tfrac{1}{2}(N_A-N_C)=\tfrac{1}{2}(N_B-N_C)$$

同理 $\dfrac{\partial S}{\partial E_B}=\tfrac{1}{2}(N_C-N_A)$ $\dfrac{\partial S}{\partial E_C}=\tfrac{1}{2}(N_A-N_B)$

$$\frac{\partial S}{\partial N_A}=\tfrac{1}{2}(E_C-E_B)\ \frac{\partial S}{\partial N_B}=\tfrac{1}{2}(E_A-E_C)\ \frac{\partial S}{\partial N_C}=\tfrac{1}{2}(E_B-E_A)$$

$$\sigma_S=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial E_A}\right)^2\sigma_{E_A}^2+\left(\frac{\partial S}{\partial E_B}\right)^2\sigma_{E_B}^2+\left(\frac{\partial S}{\partial E_C}\right)^2\sigma_{E_C}^2+\left(\frac{\partial S}{\partial N_A}\right)^2\sigma_{N_A}^2+\left(\frac{\partial S}{\partial N_B}\right)^2\sigma_{N_B}^2+\left(\frac{\partial S}{\partial N_C}\right)^2\sigma_{N_C}^2}$$

$$\sigma_S=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(N_B-N_C)^2\sigma_{E_A}^2+(N_C-N_A)^2\sigma_{E_B}^2+(N_A-N_B)^2\sigma_{E_C}^2+(E_C-E_B)^2\sigma_{N_A}^2+(E_A-E_C)^2\sigma_{N_B}^2+(E_B-E_A)^2\sigma_{N_C}^2}$$

若 $\sigma_{E_A}=\sigma_{E_B}=\sigma_{E_C}=\sigma_{N_A}=\sigma_{N_B}=\sigma_{N_C}=\sigma_O$

則 $\sigma_S=\pm\tfrac{1}{2}\sigma_O\sqrt{(N_B-N_C)^2+(E_B-E_C)^2+(N_A-N_C)^2+(E_A-E_C)^2+(N_A-N_B)^2+(E_A-E_B)^2}$

$$\sigma_S=\pm\tfrac{1}{2}\sigma_O\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}^2}$$

四、e-GNSS 為內政部國土測繪中心建構之高精度之電子化全球衛星即時動態定位系統名稱，可提供即時性衛星動態訂位服務。臺灣地區因位處於地殼變動劇烈地帶，且區域性之地表位移量各地均有明顯差異，也因此造成各基準站間坐標精度已不敷進行相關資料解算。配合內政部於 101 年 3 月 30 日公布 TWD97[2010]坐標系統，e-GNSS 動態坐標系統仍以內政部公布 TWD97[2010]國家坐標系統為起算基準，並盡量達到 2 套坐標系統間之最大相關性，約制在國土測繪中心基準站三維空間坐標，解算各基準站 e-GNSS[2015]精密坐標。至於澎湖、金門及馬祖地區維持原 TWD97[1997]坐標框架，不予變更。今若以 e-GNSS 服務測量某一區域一群既有監測點之坐標，該批監測點前期測量為根據 e-GNSS 以外之坐標系統。若擬套合前期坐標，請問應如何進行？並請就參數意義比較不同轉換式之優缺點。（25 分）

【擬答】

㈠擬套合前期坐標之進行方式：

e-GNSS 測量成果為 e-GNSS 坐標，非法定 TWD97、TWD97[2010]坐標或 TWVD 2001 正高，如欲轉換至法定坐標系統或套合前期坐標，亦須連測已知監測點，並進行坐標轉換、最小二乘配置及大地起伏內插計算。

由已建置之 e-GNSS[2015]→TWD97 坐標轉換模型，利用 2 次轉換方式，進行坐標轉換。由 e-GNSS 觀測之 e-GNSS[2015]坐標，轉換到 e-GNSS[2013]坐標，再轉換到 TWD97[2010]坐標或是 TWD97[1997]坐標，再與監測點的前期坐標進行套合作業。

1. e-GNSS[2015]轉換到 e-GNSS[2013]坐標：係由 314 個基準站之 e-GNSS[2015]坐標與 e-GNSS[2013]坐標，建置之轉換模型。
2. e-GNSS[2013]轉換到 TWD97 坐標：係由 1,060 個控制點的 e-GNSS[2013]坐標與 TWD97 坐標，建置之轉換模型。

坐標轉換涉及如何篩選共同點與最小二乘配置觀念，一般使用者不易應用。

㈡就參數意義比較不同轉換式之優缺點：

坐標轉換模式，有下列四種，其中的四參數、六參數、八參數是二維坐標轉換模式，七參數是三維坐標轉換模式。

1. 四參數相似坐標轉換（正形坐標轉換）：

其特色是形狀維持不變，即角度維持不變。四參數為：

⑴旋轉坐標軸（一個旋轉角度參數 θ）：使兩坐標系的兩軸相互平行。

⑵調整比例尺（一個比例參數 S）：使兩坐標系具有相同比例尺。

⑶平移坐標原點（二個平移坐標參數 c,d）：使兩坐標系具有相同的坐標原點。

坐標轉換模式：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = S\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \text{ 或 } \begin{cases} X = ax - by + c \\ Y = bx + ay + d \end{cases}$$

如果加入殘差，則可得坐標轉換的觀測方程式，再利用最小二乘法來求解，

$$\begin{cases} X+v_X=ax-by+c \\ Y+v_Y=bx+ay+d \end{cases}$$

$\boxed{\text{優點}}$：形狀維持不變，即角度維持不變。模式簡單。

$\boxed{\text{缺點}}$：為二維坐標轉換模式。兩坐標系可能有不同比例尺，但模式無法呈現。

*2.*六參數坐標轉換（仿射坐標轉換）：

與正形坐標轉換有些微差異。在四參數轉換中，調整比例時，是將雙軸方向的比例調整視為相同；若雙軸方向的比例調整不同時，則坐標轉換參數將增加。六參數為：

(1)旋轉坐標軸：一個旋轉角度參數 θ

(2)調整比例尺：二個比例尺參數 SX、SY

(3)平移坐標原點：二個平移坐標參數 c、f

(4)坐標軸並非正交：一個座標軸夾角 δ

坐標轉換模式：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} S_X\times x \\ S_Y\times y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} \text{ 或 } \begin{cases} X=ax+by+c \\ Y=dx+ey+f \end{cases}$$

若有三個控制點，則可唯一求解六參數；若有三個以上控制點，則有多餘觀測，可利用最小二乘法求解。

$$\begin{cases} X+v_X=ax+by+c \\ Y+v_Y=dx+ey+f \end{cases}$$

$\boxed{\text{優點}}$：增加考慮兩坐標系有不同比例尺。有考慮兩坐標軸沒有正交的情形。

$\boxed{\text{缺點}}$：為二維坐標轉換模式。

*3.*八參數坐標轉換（二維投影坐標轉換）

又稱為八參數轉換。此坐標轉換是由一個坐標系，投影到另一個坐標軸不平行的坐標系。此坐標轉換常使用於航空測量。轉換公式如下：

$$\begin{cases} X=\dfrac{a_1x+b_1y+c}{a_3x+b_3y+1} \\ Y=\dfrac{a_2x+b_2y+c_2}{a_3x+b_3y+1} \end{cases}$$

八參數坐標轉換與六參數坐標轉換相似，若 a3 與 b3 等於 0，則與六參數坐標轉換相同。此轉換，至少需有四個控制點。若多於四個控制點，則以最小二乘法求解轉換參數。

$\boxed{\text{優點}}$：有考慮一個坐標系，投影到另一個坐標系的情形。參數眾多，考量詳盡。

$\boxed{\text{缺點}}$：為二維坐標轉換模式。二維投影轉換為非線性方程式，必須先線性化。

*4.*七參數坐標轉換（三維正形坐標轉換）

三維正形坐標轉換是由一個三維坐標系，轉換到另一個三維坐標系。此坐標轉換應用於 GPS 測量與航空測量。此轉換有七個參數，包含：

⑴三個旋轉參數：分別繞 x、y、z 軸的二維旋轉，旋轉角分別為 ω、φ、κ。

⑵三個平移參數：Tx、Ty、Tz

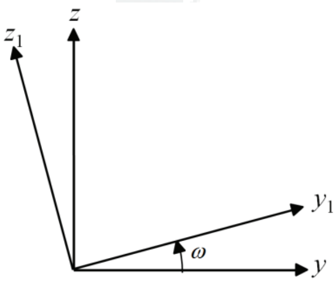
⑶一個比例參數 S。

以矩陣式表示的方程式：

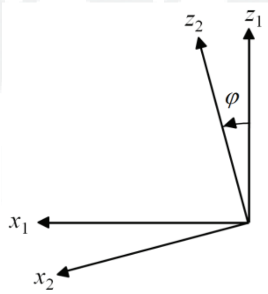
$$X_1 = M_1 X' \quad X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \quad X' = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$X_2 = M_2 X_1 \quad X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

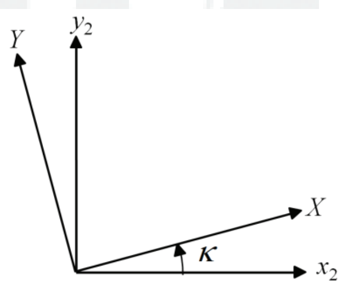
$$\overline{X} = M_3 X_2 \quad \overline{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad M_3 = \begin{bmatrix} \cos\kappa & \sin\kappa & 0 \\ -\sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



繞 *x* 軸旋轉 *ω* 角度



繞 *y* 軸旋轉 *φ* 角度



繞 *z* 軸旋轉 *κ* 角度

$$\overline{X} = SM_3M_2M_1X' + T = SMX' + T$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}$$

祝 金榜題名