107 年專技高考土木技師考試試題

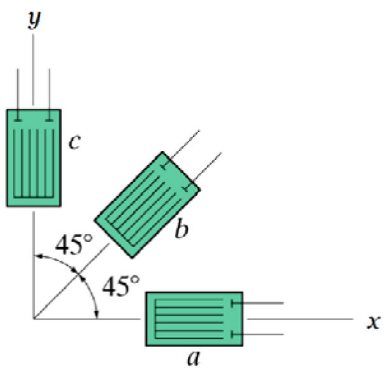
類科：土木技師
科目：結構分析(包括材料力學與結構學)

甲、 申論題部分

一、如下圖為量測三方向應變之應變座(45^0 strain rosette)，已知量測之三個應變讀數為 $\varepsilon_a = 218\mu$、$\varepsilon_b = 36\mu$ 與 $\varepsilon_c = 62\mu$，受測體材質為鋼製彈性模數 $E = 200GPa$、波松比 $\nu = 0.3$

㈠求出該量測位置平面上的主軸應變(ε_1 與 ε_2)與主軸的方向角度 θ_p。(10 分)

㈡計算此位置上對應的平面內主軸應力(σ_1 與 σ_2)及絕對最大剪應力($\tau_{abs,\max}$)。 (10 分)



45° strain rosette

考題難易：★★

【擬答】

㈠主軸應變與主軸的方向角度：

$\varepsilon_x = \varepsilon_a = 218\mu$，$\varepsilon_y = \varepsilon_c = 62\mu$

$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c = 2\times 36\mu - 218\mu - 36\mu = -208\mu$

$A = \dfrac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \dfrac{218+62}{2} = 140\mu$、$B = \dfrac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = \dfrac{218-62}{2} = 78\mu$、$C = \dfrac{\gamma_{xy}}{2} = -104\mu$、

$R = \dfrac{\gamma_{\max}}{2} = \sqrt{B^2 + C^2} = 130\mu$

該點之主應變與最大剪應變

$\varepsilon_1 = A + R = 140\mu + 130\mu = 270\mu$

$\varepsilon_2 = A - R = 140\mu - 130\mu = 10\mu$

$\tan 2\theta_p = \dfrac{C}{B} = \dfrac{-140\mu}{78\mu} \Rightarrow \theta_p = -26.57^0$

㈡主軸應力與絕對最大剪應力：

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu\\ \nu & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\end{bmatrix}=\frac{200\times10^{-3}}{1-(0.3)^2}\begin{bmatrix}1 & 0.3\\ 0.3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}218\mu\\ 62\mu\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}52\\ 28\end{bmatrix}MPa$$

$$\tau_{xy}=G\gamma_{xy}=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}=\frac{200\times10^3}{2(1+0.3)}(-208\mu)=-16MPa$$

主應力及絕對剪應力

$$A=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}=\frac{52+28}{2}=40MPa、B=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}=12MPa、C=\tau_{xy}=-16MPa$$

$$R=\sqrt{B^2+C^2}=20MPa$$

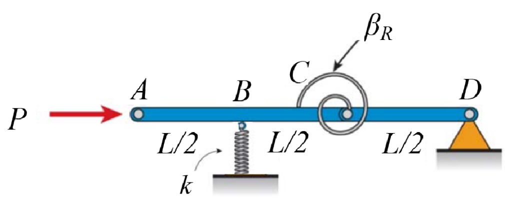
$$\sigma_1=\sigma_{\max}=A+R=40+20=60MPa$$
$$\sigma_2=\sigma_{\min}=A-R=40-20=20MPa$$
$$\sigma_3=\sigma_Z=0$$

$$絕對\ \tau_{\max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=\frac{60-0}{2}=30MPa$$

二考慮一受壓的理想化柱系統，由兩根剛性桿(桿 ABC 和桿 CD)以一旋轉彈簧 (β_R) 鉸接合於 C 點，並由一線性彈簧 (k) 及銷支承簡單支撐如下圖所示，桿的長度尺寸如圖示，外力 P 施加於 A 點。

㈠當線性彈簧勁度無窮大 $(k=\infty)$，計算此系統的臨界挫屈載重 P_{cr} (以 β_R 表示)。(10 分)

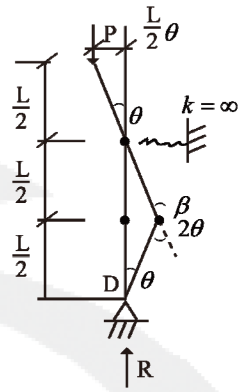
㈡當彈簧係數間的關係為 $\beta_R=\dfrac{7}{18}kL^2$，計算臨界挫屈載重 P_{cr} (以 β_R 表示)。(10 分)



考題難易：★★★

【擬答】

㈠線性彈簧勁度無窮大

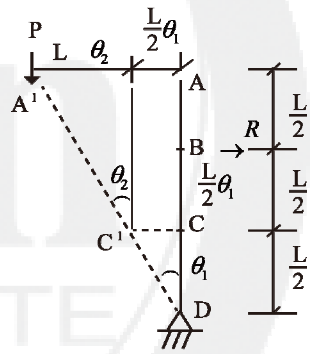


$$\sum M_D = 0 \rightarrow P - \frac{L}{2}(\theta) = \beta_R(2\theta)$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{4\beta_R}{L} \text{--ANS}$$

㈡$\beta_R = \frac{7}{18}kL^2$ 時，$k = \frac{18}{7}\cdot\frac{\beta_R}{L^2}$

取整體自由體



$$\sum M_D = 0 \rightarrow P(L\theta_2 + \frac{L}{2}\theta_1) = RL$$

$$\Rightarrow PL(\theta_2 + \frac{\theta_1}{2}) = \frac{kL}{2}(\theta_2+\theta_1)L = \frac{9}{7}\cdot\frac{\beta_R}{L}(\theta_2+\theta_1)$$

$$\Rightarrow (\frac{P}{2} - \frac{kL}{2})\theta_1 + (P - \frac{kL}{2})\theta_2 = 0 \text{.........(1)}$$

取 CD 自由體

$$\sum M_D = 0 \rightarrow P(L\theta_2) = \beta_R(\theta_2 - \theta_1) + \frac{kL}{2}(\theta_2+\theta_1)\frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow (\frac{kL^2}{4} - \beta_R)\theta_1 + (\beta_R + \frac{kL^2}{4} - PL)\theta_2 = 0 \text{.........(2)}$$

解 θ_1 及 θ_2 為非零解

$$\begin{vmatrix} \frac{P}{2} - \frac{kL}{2} & P - \frac{kL}{2} \\ \frac{kL^2}{4} - \beta_R & \beta_R + \frac{kL^2}{4} - PL \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow PL = 2.685\beta_R \;\; or \;\; 0.958\beta_R$$

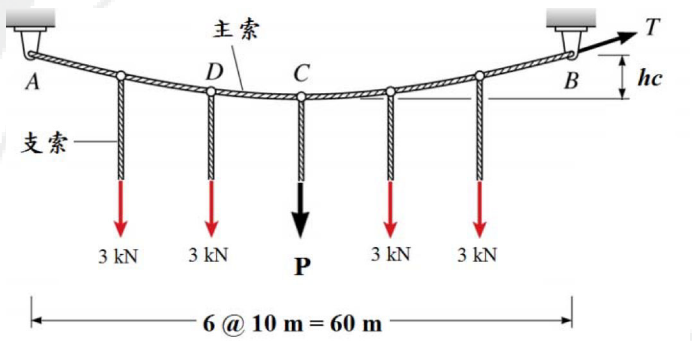
$$\therefore P_{cr} = \frac{0.958\beta_R}{L} \text{......ANS}$$

三考慮細長的鋼纜具有低撓曲勁度、可忽略自重及軸向不會伸張的特性時，受拉力的鋼纜可視為理想之橫向完全柔軟而軸向為剛性的張力構件。分析下列兩個包括鋼纜所組成之靜定結構系統：

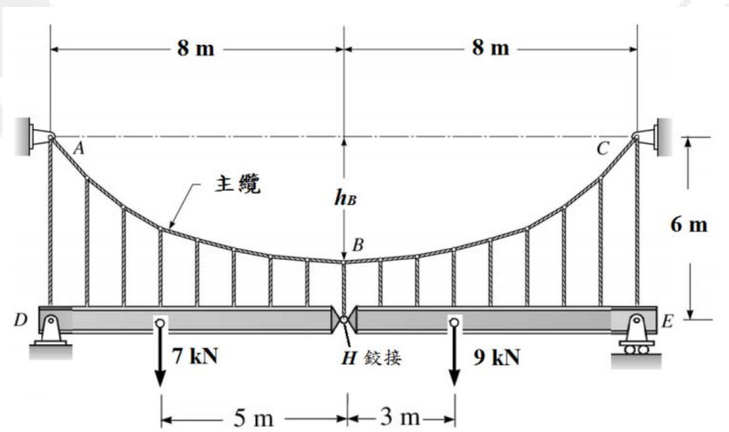
㈠如圖(a)之鋼纜系統的主索由五根垂直支索控制其平衡位置的幾何輪廓。施工過程先由四根支索皆維持固定之 3kN 之拉力後，再由中跨 C 索調整索力 P 使獲得下垂量 hc。已知 $P=4kN$ 時，$hc=7.5m$；試求 A 端錨定反力之水平分量，以及 B 端繩張力 T 的理論值。(10 分)

㈡如圖(b)所示之吊橋系統中，假設間距 $1m$ 之均勻分布吊索使主纜呈現的下垂輪廓可以拋物線函數近似，中跨 $h_B=4m$；試求主纜錨定反力的水平分量、H 鉸接點剪力，並大略繪製梁 DHE 之彎矩圖(可看出變化趨勢即可)。(15 分)

㈢若於圖(b)所示橋梁 DHE 全跨 16m 上，除 $7kN$ 與 $9kN$ 的集中載重外，再額外增加 $1kN/m$ 之分布載重；試述主纜錨定反力與梁 DHE 上最大彎矩如何改變？(例如：研判變化的倍數)。(5 分)



圖(a)



圖(b)

【擬答】

㈠A端錨定反力之水平分量，以及B 端繩張力T的

理論值對稱結構，取ADC自由體圖(a)

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y = 3+3+\frac{4}{2} = 8kN$$

$$\sum M_c = 0$$

$$\Rightarrow A_x \times 7.5 + 3\times 20 + 3\times 10 - 8\times 30 = 0$$

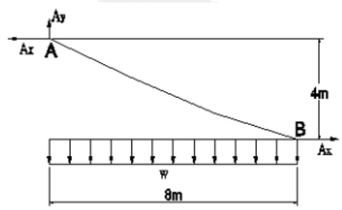
----Ans

$$\therefore A_x = 20kN(\leftarrow)$$

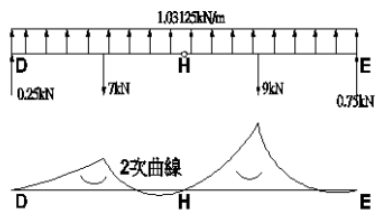
$$T = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{20^2+8^2} = 21.54kN$$ ----Ans

㈡主纜錨定反力之水平分量、H 鉸接點剪力，並

大略繪製梁DHE 之彎矩圖



(d)



彎矩圖

吊橋系統中，假設間距 1m 之均勻分布吊索使主

纜呈現的下垂輪廓可以拋物線函數近似，所以

在作用於梁 DHE 為均佈載重 w

取 DHE 自由體圖(b)

$$\sum M_D = 0 \rightarrow E_y \times 16 + 16w \times 8 - 9\times 11 - 7\times 3 = 0$$

$$\Rightarrow 16E_y + 128w = 120 \text{----(1)}$$

取 HE 自由體圖(c)

$$\sum M_H = 0 \rightarrow E_y \times 8 + 8w \times 4 - 9 \times 3 = 0$$

$$\Rightarrow 8E_y + 32w = 27 \text{----(2)}$$

解(1)(2)式

$$E_y = -0.75kN(\downarrow) \quad w = 1.03125kN/m\,(\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_H + E_y - 9 + w\times 8 = 0$$

$$\Rightarrow V_H = 1.5kN$$ ----Ans

取 DHE 自由體

$$\sum F_y = 0 \rightarrow D_y = 0.25kN(\uparrow)$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow D_x = 0kN$$

取 AB 自由體圖(d)

$$\sum M_A = 0 \rightarrow A_x \times 4 - 8w \times 4 = 0 \Rightarrow A_x = 8.25kN(\leftarrow)$$ ----Ans

㈢額外增加$1kN/m$之分布載重主纜錨定反力與梁DHE 上最大彎矩如何改變

$$\overline{w}=w+1=2.03125kN/m$$

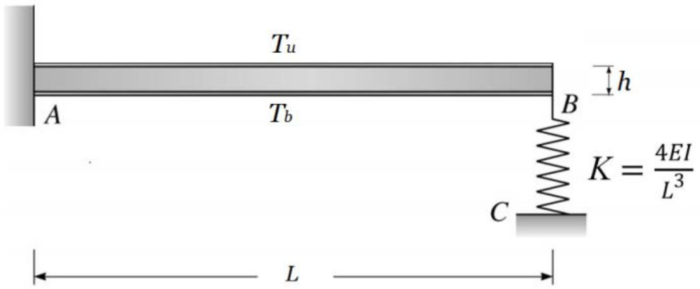
$$\frac{\overline{w}}{w}=\frac{2.03125}{1.03125}=1.97$$

額外增加$1kN/m$之分布載重由主纜承受，所以梁DHE上最大彎矩無任何改變，主纜錨定反力放大1.97倍。

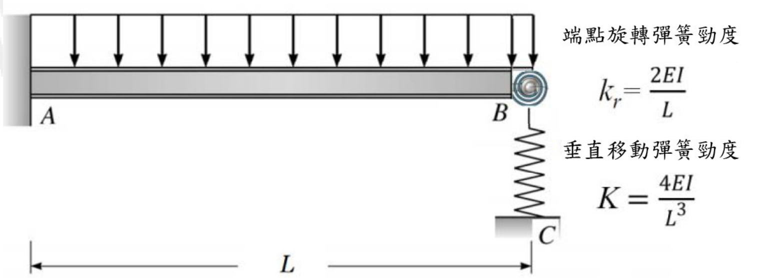
四鋼梁具均勻斷面性質，撓曲剛度EI，梁深h，左端為固接，右端彈簧支撐條件如各圖所示。

㈠如圖(a)所示，梁上下表面溫度不同$(T_u > T_b)$，假設溫度梯度線性變化，膨脹係數α；試以贅力法(柔度法)求解 B 點的位移。(10 分)

㈡如圖(b)所示，梁受均布載重w作用；試以傾角變位法求解 B 點的位移與傾角。



圖(a)

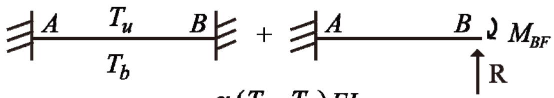


圖(b)

考題難易：★★★★

【擬答】

㈠圖(a)之 B 點位移



$$M_{BF}=\frac{\alpha(T_u-T_b)EI}{h}$$

設 C 點反力R為贅力

$$\delta_B=\frac{M_{BF}L^2}{2EI}-\frac{RL^2}{3EI}$$

$$\rightarrow\frac{R}{K}=\frac{\alpha(T_u-T_b)EI}{h}\cdot\frac{L^2}{2EI}-\frac{RL^2}{3EI}\Rightarrow R=\frac{6}{7}\cdot\frac{\alpha EI(T_u-T_b)}{Lh}$$

$$\therefore\delta_B=\frac{R}{K}=\frac{3}{14}\cdot\frac{\alpha L^2(T_u-T_b)}{h}\text{……ANS}$$

㈡圖(b)之 B 點位移

設 C 點反力為 S

$$K=\frac{2EI}{L}\text{、}R=\frac{\Delta_B}{L}$$

$$M_{AB}=k(\theta_B-3R)-\frac{1}{12}wL^2$$

$$M_{BA}=k(2\theta_B-3R)+\frac{1}{12}wL^2$$

$$M_{BA}=-K_r\theta_B\Rightarrow\theta_B-R=-\frac{wL^3}{72EI}\text{………(1)}$$

在 B 點，$\sum F_y=0$

$$\frac{M_{AB}+M_{BA}}{L}+\frac{1}{2}wL=S=KRL\Rightarrow\theta_B-\frac{8}{3}R=-\frac{wL^3}{12EI}\text{………(2)}$$

解(1)(2)得

$$R=\frac{wL^3}{24EI}\rightarrow\frac{\Delta_B}{L}=\frac{wL^3}{24EI}\Rightarrow\Delta_B=\frac{wL^4}{24EI}(\downarrow)\text{………ANS.}$$

$$\theta_B-\frac{8}{3}R=-\frac{wL^3}{12EI}\Rightarrow\theta_B=\frac{wL^3}{36EI}(\curvearrowright)$$

祝金榜題名