

## 108 年專技高考土木技師試題

類科：土木技師

科目：工程測量(包括平面測量與施工測量)

一、今欲測量一正方形工地的面積，假設以某部儀器觀測該正方形邊長  $a$  的中誤差為  $\sigma$ ：

- (一) 若欲控制該工地面積的中誤差不得大於  $\sigma_A$ ，在僅觀測一次正方形邊長的情形下，請說明  $\sigma$  與  $\sigma_A$  之間須滿足何種關係？(10 分)
- (二) 若上述關係無法滿足，在使用同一部儀器的狀況下，請提出可採取的觀測策略並說明理由。(15 分)

【解題關鍵】

《考題難易》★★★★

《破題關鍵》關鍵字：中誤差，誤差傳播定律。

重點提要：重複觀測取平均，可以減小中誤差，提高觀測精度與成果。

【命中特區】

書名：108 土木技師題庫班專用教材 測量學作者：賴明 編號：C1 章節出處：第 1 頁，  
考題 A-2 之類似題。主題 A 誤差傳播定律壹、基本型一、長度、面積、體積

【擬答】

(一) 說明  $\sigma$  與  $\sigma_A$  之間須滿足的關係：

假設：觀測所得之正方形面積  $S = a^2$ 。  $\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} a^2 = 2a$ ，由誤差傳播定律

$$\sigma_S = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)^2 \times \sigma_a^2} = \pm \sqrt{(2a)^2 \times \sigma^2} = \pm 2a\sigma，$$

若欲控制該工地面積的中誤差不得大於  $\sigma_A$ ，則  $\sigma$  與  $\sigma_A$  之間須滿足的關係為：

$$\sigma_S \leq \sigma_A，2a\sigma \leq \sigma_A，a\sigma \leq \frac{1}{2}\sigma_A$$

(二) 若上述關係無法滿足，亦即， $2a\sigma > \sigma_A$ ，究其原因，可能是中誤差  $\sigma$  太大，精度不足。

如欲滿足  $\sigma_S \leq \sigma_A$ ， $2a\sigma \leq \sigma_A$ ，可採取的觀測策略為：正方形的四個邊長均觀測。

假設：正方形的四個邊長為  $a_1, a_2, a_3, a_4$ ，且各邊長的觀測精度均為  $\sigma$ 。

正方形邊長平均值為  $a' = \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ ， $\frac{\partial a'}{\partial a_i} = \frac{1}{4}$ ， $i = 1, 2, 3, 4$

$$\text{由誤差傳播定律：}\sigma_{a'} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial a'}{\partial a_1}\right)^2 \times \sigma_{a_1}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial a'}{\partial a_4}\right)^2 \times \sigma_{a_4}^2}$$

$$\sigma_{a'} = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \sigma^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \sigma^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \sigma^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \sigma^2}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1}{16} \times 4\sigma^2} = \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4}} = \pm \frac{\sigma}{2}, \text{亦即, } \sigma_{a'} = \pm \frac{1}{2}\sigma$$

觀測所得之正方形面積  $S' = a'^2$ 。  $\frac{\partial S'}{\partial a'} = \frac{\partial}{\partial a'} a'^2 = 2a'$ ，由誤差傳播定律

$$\sigma_{S'} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial S'}{\partial a'}\right)^2 \times \sigma_{a'}^2} = \pm \sqrt{(2a')^2 \times \sigma_{a'}^2} = \pm 2a' \cdot \sigma_{a'},$$

假設：正方形的四個邊長  $a_1 \approx a_2 \approx a_3 \approx a_4 \approx a' \approx a$ ，又， $\sigma_{a'} = \pm \frac{1}{2}\sigma$

$\therefore \sigma_{S'} = \pm 2a \times \frac{1}{2}\sigma = \pm a\sigma$ ，亦即，面積中誤差減小為原面積中誤差之半  
精度提高一倍，即可滿足  $\sigma$  與  $\sigma_A$  之間的關係。

二、單曲線中間樁之測設方法包含偏角法(deflection angle method)及切線支距法 (the methods of offsets from tangents)等，請分別說明其原理、計算方式及適用場合。(25 分)

【解題關鍵】

- 1.《考題難易》★★★
- 2.《破題關鍵》

關鍵字：路線測量之偏角法、切線支距法。

重點提要：原理、計算方式及適用場合。

【命中特區】

書名：2019 土木 測量學作者：賴明編號：測量學 V

章節出處：第七章 工程測量之第 2 節 路線測量之三、單曲線之測設。

【擬答】

(一) 偏角法之原理、計算方式及適用場合：

1.原理：

(1) 偏角：圓曲線上任一點至切點之弦，與切線所夾之角，或二弦線相交而成之圓周角。

總偏角：又稱累積偏角，凡於曲線起點(B.C.)計算至各中間樁者，所形成之偏角。

(2) 幾何原理：偏角=圓周角

① 如右圖， $D_1$  為  $A_1$  弧線之圓心角， $d_1$  為  $A_1$  弧線之圓周角。

數學上，對應相同的弧長，圓心角=2×圓周角

$$D_1 = 2 \times d_1, \quad d_1 = \frac{1}{2} D_1。$$

當弧長為 20 公尺，弧長與弦長差距甚小，弧長可視為弦長。

$$\text{由弧長公式 } \overline{A_1I} = R \times D_1 \times \frac{\pi}{180^\circ}$$

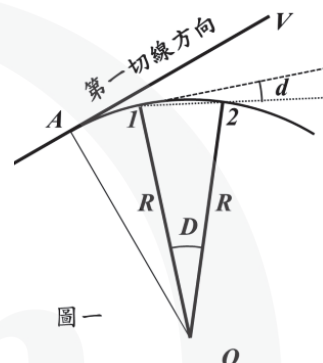
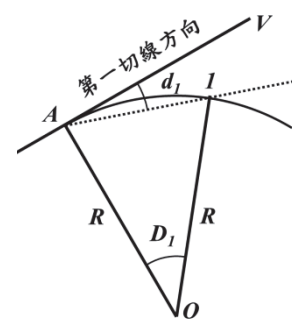
$$\therefore D_1 = \frac{\overline{A_1I}}{R} \times \frac{180^\circ}{\pi}, \quad d_1 = \frac{1}{2} \times \frac{\overline{A_1I}}{R} \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

② 如圖一。如  $\overline{12} = 20m = C = \text{整弦}$ ，則偏角  $d = \frac{1}{2} D$

$$D = \frac{\overline{12}}{R} \times \frac{180^\circ}{\pi}, \quad d = \frac{1}{2} D = \frac{1}{2} \times \frac{\overline{12}}{R} \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

則， $A_2$  弧線之偏角  $d = \frac{1}{2} (D_1 + D)$

第 3,4,5,...點，依此類推



圖一

2. 計算方式：

$$\text{如圖，} d_1 = \frac{D_1}{2}, \quad d_2 = \frac{D_1 + D}{2}, \quad d_3 = \frac{D_1 + D + D}{2}$$

$$d_{E.C.} = \frac{D_1 + D + \dots + D_2}{2} = \frac{\Delta}{2}$$

由弧長計算圓心角，得各中間樁偏角值。

$$D_1 = \frac{\overline{A_1I}}{R} \times \frac{180^\circ}{\pi}, \quad D = \frac{\overline{12}}{R} \times \frac{180^\circ}{\pi} \quad \dots \quad D_2 = \frac{\overline{4B}}{R} \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

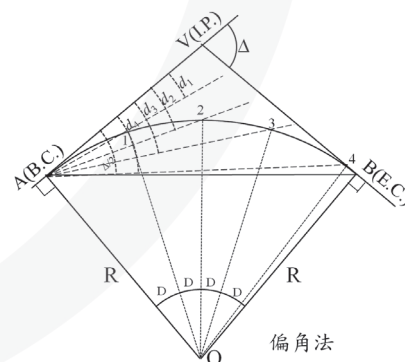
曲線中， $\overline{12} = \overline{23} = \overline{34} = C$  (整弦)， $\overline{A_1I} = C_1$  (第一分弦)，

$\overline{4B} = C_2$  (第二分弦)，

$$D = \frac{C}{R} \times \frac{180^\circ}{\pi} \rightarrow \text{整弦所對之圓心角}$$

$$D_1 = \frac{C_1}{R} \times \frac{180^\circ}{\pi} \rightarrow \text{第一分弦所對之圓心角}$$

$$D_2 = \frac{C_2}{R} \times \frac{180^\circ}{\pi} \rightarrow \text{第二分弦所對之圓心角}$$



偏角法

3. 適用場合：偏角法適用於各式單曲線之測設，最為正確且簡便。

(二) 切線支距法之原理、計算方式及適用場合：

1. 原理：

以第一切線或第二切線為橫軸。垂直方向為縱軸。

如以第一切線為橫軸，為前半曲線；以第二切線為橫軸，為後半曲線。

如圖，計算各中間樁之橫距  $x_I$  及支距長  $y_I$ 。

$$x_I = R \times \sin D_I, \quad y_I = R - R \times \cos D_I$$

由 B.C 點(A 點)起沿著第一切線上丈量  $x_1, x_2, x_3, \dots$ ，

定得  $1', 2', 3', 4' \dots$ 。

在  $1', 2', 3', 4' \dots$  等點上，使用五角稜鏡，或 3：4：5 法定垂直方向，並分別量取

$y_1, y_2, y_3, y_4, \dots$  定得各中間樁。

依同樣方法，由 E.C 開始，設置後半曲線之樁位。

2. 計算方式：

如圖，1~4 為前半曲線，7~5 為後半曲線

(1) 前半曲線：

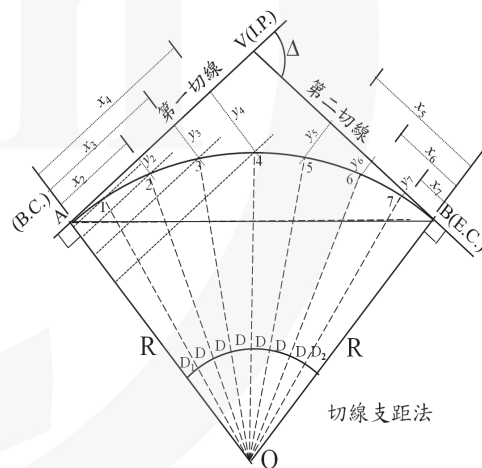
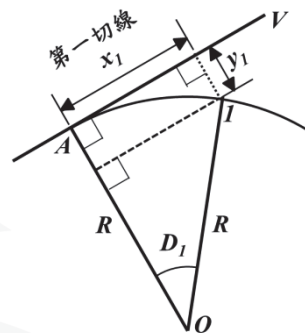
$$\begin{cases} x_1 = R \times \sin D_1, y_1 = R(1 - \cos D_1) \\ x_2 = R \times \sin(D_1 + D), y_2 = R(1 - \cos(D_1 + D)) \\ x_3 = R \times \sin(D_1 + 2D), y_3 = R(1 - \cos(D_1 + 2D)) \\ \dots \end{cases}$$

(2) 後半曲線：

$$\begin{cases} x_7 = R \times \sin D_2, y_7 = R(1 - \cos D_2) \\ x_6 = R \times \sin(D_2 + D), y_6 = R(1 - \cos(D_2 + D)) \\ x_5 = R \times \sin(D_2 + 2D), y_5 = R(1 - \cos(D_2 + 2D)) \\ \dots \end{cases}$$

3. 適用場合：

切線支距法適用於：平坦、切線上無障礙物之短距離(半徑較短)單曲線。



三、衛星定位測量中，從衛星軌道資訊到待測地面點位置皆需參考到不同的坐標系統。請列舉並說明各坐標系統的定義、以及坐標系統之間的相互關係。(25 分)

【解題關鍵】

《考題難易》★★★

《破題關鍵》

關鍵字：衛星定位測量、各坐標系統。

重點提要：坐標系統定義、坐標系統轉換。

【命中特區】

書名：2019 土木 測量學作者：賴明編號：測量學VI

章節出處：第九章 衛星定位測量之三、GPS 坐標系統。

【擬答】

GPS 的資料是 WGS-84 坐標的系統。在計算上，是以地心地固坐標系統(Earth Center Earth Fixed Coordinate Frame, ECEF)為主。

(一) 地心地固坐標系：

亦稱傳統地面坐標系。坐標系為直角坐標系，具全球性。其坐標系為：

原點：固定在地球地心（質量中心）

X 軸：由地心指向：通過格林威治之平天文子午圈與赤道的交點。

Z 軸：由地心指向 CIO 之平均北極。CIO 為 1900 年～1905 年測得之平均北極位置

Y 軸：位在赤道面，分別與 X、Z 軸正交，構成一個右旋系統

(二) 世界地理坐標(World Geodetic System 1984,WGS-84)：

此坐標系亦是固定球心的坐標，兩者的差異，WGS-84 是以橢圓球體來定義。三軸：經度(Longitude)、緯度(Latitude)和幾何高度(Height above ellipsoid)。WGS-84 和 ECEF 的最大差異，前者為橢球坐標系，後者為直角坐標系。

緯度：以赤道為基準，向南、北極各為 90°，稱為南緯、北緯。

經度：以通過英國格林威治天文台的子午線為基準，向東、西各 180°，稱為東經、西經。

1. 橢球坐標  $(\varphi, \lambda, h)$  至直角坐標  $(X, Y, Z)$  的轉換公式：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ \left(\frac{b^2}{a^2}N+h\right)\sin\varphi \end{bmatrix}, \quad N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}$$

式中； $\varphi$ ：經度。 $\lambda$ ：緯度。 $h$ ：地表到接收儀的垂直距離。

$N$ ：球心到地表的距離。 $a$ ：橢圓球體的長軸長。 $b$ ：橢圓球體的短軸長。

2. 直角坐標 $(X, Y, Z)$ 至橢球坐標 $(\varphi, \lambda, h)$ 的轉換公式：

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \lambda \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1} \frac{Z + e^2 b \sin^3 \theta}{p - e^2 a \cos^3 \theta} \\ \tan^{-1} \frac{Y}{X} \\ \frac{p}{\cos \varphi} - N \end{bmatrix}, \text{ 式中； } p = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

(三)TWD97 坐標系統：

1.TWD97 坐標系：TWD 97 是「全球性地心大地坐標基準」，為全球性三度空間坐標系統。

(1) 形狀基準(Reference Spheroid)

① TWD97 之建構係採用國際地球參考框架(International Terrestrial Reference Frame, ITRF)。ITRF 為利用全球測站網之觀測資料成果推算所得之地心坐標系統，其方位採國際時間局定義在 1984.0 時刻之方位。

② 參考橢球體 (GRS80) 採用 1980 年國際大地測量學與地球物理學協會公布之：

長半徑  $a = 6,378,137.000m$ 、短半徑  $b = 6,356,752.3141m$

$$\text{扁平率 } f = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{298.257222101} \quad \text{第一離心率 } e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{149.37903}$$

③ 投影方式：橫麥卡脫投影經差二度分帶 ( $2^\circ TM$ )。

(2) 位置基準：TWD97 的坐標基準：內政部衛星定位追蹤站的坐標值。

(3) 高程基準：TWVD 2001：臺灣地區於民國 89~91 年間，以新型電子式精密水準儀施測一等水準網，計有 2065 個一等水準點(1010 個一等一級水準點、1055 個一等二級水準點)，分佈於 4253 公里之水準路線上。水準路線涵蓋臺灣本島外圍及中橫、南橫等路線，共 1357 條測線，全長總計約 3207 公里。

並同時進行 GPS 衛星定位測量與重力測量等工作，建立新的臺灣高程基準 (Taiwan Vertical Datum, TWVD 2001)。

2. 坐標轉換：

目前推廣使用之 e-GNSS 測量，其成果為 e-GNSS 坐標，非法定 TWD97、TWD97[2010]坐標或 TWVD 2001 正高，如欲轉換至法定坐標系統，須進行坐標轉換、最小二乘配置及大地起伏內插計算。

利用 2 次轉換方式，進行坐標轉換。由 e-GNSS 觀測之 e-GNSS[2019]坐標，轉換到 e-GNSS[2013]坐標，再轉換到 TWD97[2010]坐標或是 TWD97[1997]坐標。

(四) 地面點位之高程：

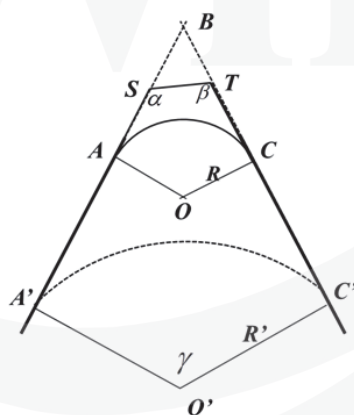
WGS84 地心坐標系統，其  $Z$  坐標值與水準測量之高程  $H$  是不同，因為：

- (1) WGS84 地心坐標系統的原點是地心，其  $Z$  坐標值是由原點起算。
  - (2) 水準測量高程  $H$  的基準面是平均海面 (M.S.L.)，而  $Z$  坐標值是由參考橢球體起算，兩者的基準是不同的。
- 兩者之差值，稱為大地起伏  $N$ 。 $N$  值亦是「參考橢球面」與「大地水準面」之差值。 $N$  值與地域性有關，可由大地起伏模式獲得。

四 如圖欲對一道路進行彎道改善工程，圖中 AC 弧線為原道中心之圓曲線，起點 A 之樁號為  $(80K + 321.34m)$ ，但已無法查得原曲線半徑  $R$  的大小。因現場無法對切線交點 B 進行定樁及觀測，因此分別於兩切線上設立樁位 S 及 T，並觀測  $\overline{AS}$  長度為 18.16 公尺、 $\overline{ST}$  長度為 28.52 公尺， $\alpha = \angle AST = 135^\circ$ 、 $\beta = \angle STC = 101^\circ$ ；新道路曲線仍設計為圓曲線，且具有與原曲線相同的曲線中心角  $\gamma$ 。請回答以下問題：

(一) 請推算原 AC 曲線之曲線中心角  $\gamma$  及曲線半徑  $R$ 。(15 分)

(二) 若新曲線的半徑  $R'$  設計為 70 公尺，請計算新曲線起點  $A'$  的樁號、以及  $A'C'$  的弧線長度。(10 分)



【解題關鍵】

《考題難易》★★★★

《破題關鍵》關鍵字：路線測量，單曲線，正弦定律。

重點提要：由多邊形內角和，可計算曲線中心角。

【命中特區】

書名：108 土木技師題庫班專用教材 測量學作者：賴明編號：C2

章節出處：第 146 頁，考題 B-8-28 類似題。貳：路線測量二、單曲線組成、計算與測設

## 【擬答】

(一) 計算原  $AC$  曲線之曲線中心角  $\gamma$  及曲線半徑  $R$ 。

1. 由五邊形內角和，計算原  $AC$  曲線之曲線中心角  $\gamma$

$$\text{五邊形 } OASTC \text{ 內角和} = (5-2) \times 180^\circ = 540^\circ$$

$$\because \angle AOC = \gamma, \angle OCT = 90^\circ, \angle CTS = \beta, \angle TSA = \alpha, \angle SAO = 90^\circ$$

$$\therefore \gamma + 90^\circ + \beta + \alpha + 90^\circ = 540^\circ, \gamma + \beta + \alpha = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ$$

$$\gamma = 360^\circ - \alpha - \beta = 360^\circ - 135^\circ - 101^\circ = 124^\circ$$

2. 從三角形  $BST$ ，由正弦定律，得  $\overline{SB}$

$$\because \overline{ST} = 28.52m, \angle BST = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ,$$

$$\angle STB = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 101^\circ = 79^\circ$$

$$\angle TBS = 180^\circ - \angle BST - \angle STB = 180^\circ - 45^\circ - 79^\circ = 56^\circ,$$

$$\text{由正弦定律：} \frac{\overline{SB}}{\sin \angle STB} = \frac{\overline{ST}}{\sin \angle TBS}, \frac{\overline{SB}}{\sin 79^\circ} = \frac{28.52}{\sin 56^\circ},$$

$$\overline{SB} = 28.52 \times \frac{\sin 79^\circ}{\sin 56^\circ} = 33.77m$$

3. 切線長  $T = \overline{AS} + \overline{SB} = 18.16 + 33.77 = 51.93m$

4. 計算原  $AC$  曲線之曲線半徑  $R$

$$T = R \cdot \tan \frac{\gamma}{2}, 51.93 = R \times \tan \frac{124^\circ}{2} = R \times \tan 62^\circ, R = \frac{51.93}{\tan 62^\circ} = 27.61m$$

$\therefore$  原  $AC$  曲線之曲線中心角  $\gamma = 124^\circ$  及曲線半徑  $R = 27.61m$

(二) 若新曲線的半徑  $R'$  設計為 70 公尺，計算新曲線起點  $A'$  的樁號、以及  $A'C'$  的弧線長度。

$$1. \text{ 計算新曲線切線長 } T' = R' \cdot \tan \frac{\gamma}{2} = 70 \times \tan \frac{124^\circ}{2} = 70 \times \tan 62^\circ = 131.65m$$

$$2. \text{ 計算新曲線起點 } A' \text{ 的樁號 } \overline{AA'} = T' - T = 131.65 - 51.93 = 79.72m$$

$$\text{新曲線起點 } A' \text{ 的樁號} = A \text{ 點的樁號} - \overline{AA'}$$

$$= 80K + 321.34m - 79.72m = 80K + 241.62m$$

$$3. \text{ 計算新曲線的弧線長度 } A'C' = L, L = R' \cdot \gamma = 70 \times 124^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = 151.49m$$

$\therefore$  新曲線起點  $A'$  的樁號  $= 80K + 241.62m$ 、以及  $A'C'$  的弧線長度  $= 151.49m$

※祝金榜題名 最新名師線上解題&開課→

