

110 年專技高考 土木技師試題

等 別：高等考試
類 科：土木工程技師
科 目：工程測量(包括平面測量與施工測量)

一、於二維區域直角（橫向、縱向）坐標系統中，已知二點 $A(E_A, N_A) = (200.000m, 50.000m)$ 、 $B(E_B, N_B) = (783.000m, 156.000m)$ ，今使用一台全站儀（測距精度 $\pm(5mm+3ppm)$ 、測角精度 $\pm 5''$ ），設置測站於 A 點，後視 B 點將水平角度盤歸零，順時鐘方向旋轉觀測 C 點稜鏡得到水平角為 $155^\circ 30' 0''$ 、天頂距為 $95^\circ 15' 0''$ 、傾斜距離為 $300.000m$ ，試求 C 點坐標 $C(E_C, N_C)$ 及其中誤差 (σ_E, σ_N) 。(25 分)

【考題難易】★★★★

【破題關鍵】關鍵字：坐標及其中誤差，誤差傳播定律的應用。

重點提要：二維區域的坐標，但需使用三維的觀念。

【命中特區】2021 土木測量學/賴明：

第六章控制測量，第 1 節全測站儀坐標測量，三、三維坐標計算。

【擬答】

已知：水平角 $\theta \pm \sigma_\theta = 155^\circ 30' 00'' \pm 5''$ ，天頂距 $z \pm \sigma_z = 95^\circ 15' 00'' \pm 5''$

(一) 計算傾斜距離 S 之中誤差 σ_S

$$S = 300m = 0.3km, \quad \sigma_S = \pm \sqrt{5^2 + (3 \times 0.3)^2} = \pm 5.08mm = \pm 0.00508m$$

(二) 計算 A, B 二點的平距 D

$$D = S \times \sin z = 300.000 \times \sin 95^\circ 15' 00'' = 298.7415m$$

(三) 由 A, B 二點坐標，得方位角

$$\Delta E = \Delta E_{AB} = E_B - E_A = 783.000 - 200.000 = 583.000m > 0$$

$$\Delta N = \Delta N_{AB} = N_B - N_A = 156.000 - 50.000 = 106.000m > 0$$

第 I 象限

$$\phi_{AB} = \tan^{-1} \frac{\Delta E}{\Delta N} = \tan^{-1} \frac{583.000}{106.000} = 79^\circ 41' 42.6''$$

(四) 計算 C 點坐標 $C(E_C, N_C)$

$$\phi_{AC} = \phi_{AB} + \theta = 79^\circ 41' 42.6'' + 155^\circ 30' 00'' = 235^\circ 11' 42.6''$$

$$E_C = E_A + D \times \sin \phi_{AC} = 200.000 + 298.7415 \times \sin 235^\circ 11' 42.6'' = -45.297m$$

$$N_C = N_A + D \times \cos \phi_{AC} = 50.000 + 298.7415 \times \cos 235^\circ 11' 42.6'' = -120.517m$$

$$C(E_C, N_C) = (-45.297m, -120.517m)$$

(五) 計算 C 點坐標中誤差

$$1. E_C = E_A + S \cdot \sin z \cdot \sin(\phi_{AB} + \theta)$$

$$\frac{\partial E_C}{\partial S} = \sin z \cdot \sin(\phi_{AB} + \theta) = \sin 95^\circ 15' 00'' \times \sin 235^\circ 11' 42.6'' = -0.8177$$

$$\frac{\partial E_C}{\partial z} = S \cdot \cos z \cdot \sin(\phi_{AB} + \theta) = 300 \times \cos 95^\circ 15' 00'' \times \sin 235^\circ 11' 42.6'' = 22.5396$$

$$\frac{\partial E_C}{\partial \theta} = S \cdot \sin z \cdot \cos(\phi_{AB} + \theta) = 300 \times \sin 95^\circ 15' 00'' \times \cos 235^\circ 11' 42.6'' = -170.5165$$

$$\begin{aligned} \sigma_{E_C} &= \pm \sqrt{\left(\frac{\partial E_C}{\partial S}\right)^2 \times \sigma_S^2 + \left(\frac{\partial E_C}{\partial z}\right)^2 \times \left(\frac{\sigma_z''}{\rho''}\right)^2 + \left(\frac{\partial E_C}{\partial \theta}\right)^2 \times \left(\frac{\sigma_\theta''}{\rho''}\right)^2} \\ &= \pm \sqrt{(-0.8177 \times 0.00508)^2 + (22.5396 \times 5''/206265'')^2 + (-170.5165 \pm 5''/206265'')^2} \\ &= \pm 0.0059m \end{aligned}$$

$$2. N_C = N_A + S \cdot \sin z \cdot \cos(\phi_{AB} + \theta)$$

$$\frac{\partial N_C}{\partial S} = \sin z \cdot \cos(\phi_{AB} + \theta) = \sin 95^\circ 15' 00'' \times \cos 235^\circ 11' 42.6'' = -0.5684$$

$$\frac{\partial N_C}{\partial z} = S \cdot \cos z \cdot \cos(\phi_{AB} + \theta) = 300 \times \cos 95^\circ 15' 00'' \times \cos 235^\circ 11' 42.6'' = 15.6683$$

$$\frac{\partial N_C}{\partial \theta} = -S \cdot \sin z \cdot \sin(\phi_{AB} + \theta) = -300 \times \sin 95^\circ 15' 00'' \times \sin 235^\circ 11' 42.6'' = -245.2970$$

$$\begin{aligned} \sigma_{N_C} &= \pm \sqrt{\left(\frac{\partial N_C}{\partial S}\right)^2 \times \sigma_S^2 + \left(\frac{\partial N_C}{\partial z}\right)^2 \times \left(\frac{\sigma_z''}{\rho''}\right)^2 + \left(\frac{\partial N_C}{\partial \theta}\right)^2 \times \left(\frac{\sigma_\theta''}{\rho''}\right)^2} \\ &= \pm \sqrt{(-0.5684 \times 0.00508)^2 + (15.6683 \times 5''/206265'')^2 + (-245.297 \pm 5''/206265'')^2} \\ &= \pm 0.0066m \end{aligned}$$

$$\therefore C(E_C, N_C) = (-45.297m, -120.517m) \quad (\sigma_E, \sigma_N) = (\pm 0.0059m, \pm 0.0066m)$$

二、使用全站儀(Total Station)由二已知全控制點 A、B 分別進行導線測量及三角高程測量至 P 點，並計算得 P 點坐標成果如下表，試求 P 點之三維坐標最或然值及其中誤差？(25 分)

路線	路線長	P 點橫坐標	P 點縱坐標	P 點高程
A→P	4.0 km	299.950 m	253.110 m	92.675 m
B→P	2.5 km	299.736 m	252.984 m	92.655 m

【考題難易】★★★

【破題關鍵】關鍵字：坐標最或然值及其中誤差。

重點提要：水準與坐標皆是：權與路線長成反比。

【命中特區】2021 土木測量學/賴明：

第五章 導線測量，第 2 節 導線計算，三、導線交會點計算。

第三章 水準測量，九、直接水準測量之誤差限制及平差計算。

【擬答】

(一) 權：權 P 與路線長 L 成反比

$$P \propto \frac{1}{L}, P_A : P_B = \frac{1}{L_A} : \frac{1}{L_B} = \frac{1}{4} : \frac{1}{2.5} = \frac{1}{40} : \frac{1}{25} = 5 : 8, [P] = P_A + P_B = 5 + 8 = 13$$

(二) 計算 P 點三維坐標之最或然值及其中誤差

1. 計算 P 點橫坐標 E 之最或然值及其中誤差

$$[P \cdot E] = 5 \times 299.950 + 8 \times 299.736 = 3897.638$$

$$\bar{E} = \frac{[P \cdot E]}{[P]} = \frac{3897.638}{13} = 299.8183m$$

$$v_A = 299.950 - 299.8183 = 0.1317, v_B = 299.736 - 299.8183 = -0.0823$$

$$[Pv^2] = 5 \times 0.1317^2 + 8 \times (-0.0823)^2 = 0.140911$$

$$\sigma_{\bar{E}} = \pm \sqrt{\frac{[Pv^2]}{[P] \times (n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{0.140911}{13 \times (2-1)}} = \pm 0.1041m$$

2. 計算 P 點縱坐標 N 之最或然值及其中誤差

$$[P \cdot N] = 5 \times 253.110 + 8 \times 252.984 = 3289.422$$

$$\bar{N} = \frac{[P \cdot N]}{[P]} = \frac{3289.422}{13} = 253.0325m$$

$$v_A = 253.110 - 253.0325 = 0.0775, \quad v_B = 252.984 - 253.0325 = -0.0485$$

$$[P_{vv}] = 5 \times 0.0775^2 + 8 \times (-0.0485)^2 = 0.048849$$

$$\sigma_{\bar{N}} = \pm \sqrt{\frac{[P_{vv}]}{[P] \times (n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{0.048849}{13 \times (2-1)}} = \pm 0.0613m$$

3. 計算 P 點高程 H 之最或然值及其中誤差

$$[P \cdot H] = 5 \times 92.675 + 8 \times 92.655 = 1204.615$$

$$\bar{H} = \frac{[P \cdot H]}{[P]} = \frac{1204.615}{13} = 92.6627m$$

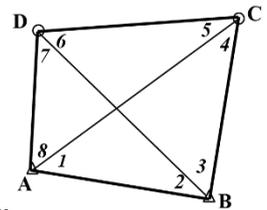
$$v_A = 92.675 - 92.6627 = 0.0123, \quad v_B = 92.655 - 92.6627 = -0.0077$$

$$[P_{vv}] = 5 \times 0.0123^2 + 8 \times (-0.0077)^2 = 0.00123077$$

$$\sigma_{\bar{E}} = \pm \sqrt{\frac{[P_{vv}]}{[P] \times (n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{0.00123077}{13 \times (2-1)}} = \pm 0.0097m$$

$$\therefore P \text{ 點之三維坐標最或然值及其中誤差 } P(\bar{E} \pm \sigma_{\bar{E}}, \bar{N} \pm \sigma_{\bar{N}}, \bar{H} \pm \sigma_{\bar{H}}) = (299.818m \pm 0.104m, 253.033m \pm 0.061m, 92.663m \pm 0.010m)$$

三、如下圖之四邊形，以同一台經緯儀觀測得到水平角： $\theta_3=56^\circ04'20''$ 、 $\theta_4=42^\circ50'06''$ 、 $\theta_5=33^\circ01'40''$ 、 $\theta_6=48^\circ04'30''$ 、 $\theta_7=47^\circ48'13''$ 、 $\theta_8=51^\circ05'25''$ ，試予平差及計算水平角 θ_1 、 θ_2 之值（改正至 0.1"）。(25 分)



【考題難易】★★★★★

【破題關鍵】關鍵字：四邊形鎖平差，有 3 個角條件，1 個邊條件。

重點提要：先計算水平角 θ_1 、 θ_2 之概值，再進行平差。

【命中特區】2021 土木測量學/賴明：

第六章控制測量，第 2 節三角測量，六、三角測量之簡易平差法。

【擬答】

需進行四邊形鎖平差，有 3 個角條件，1 個邊條件。

(一) 計算水平角 θ_1 、 θ_2 之值

1. 使用角條件之對頂角相等

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 &= \theta_5 + \theta_6, & \theta_1 + \theta_2 &= 33^\circ01'40'' + 48^\circ04'30'' = 81^\circ06'10'', \\ \theta_2 &= 81^\circ06'10'' - \theta_1 \dots\dots(a) \end{aligned}$$

2. 使用邊條件

$$\frac{\sin \theta_1 \times \sin \theta_3 \times \sin \theta_5 \times \sin \theta_7}{\sin \theta_2 \times \sin \theta_4 \times \sin \theta_6 \times \sin \theta_8} = 1 \quad \therefore \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\sin \theta_4 \times \sin \theta_6 \times \sin \theta_8}{\sin \theta_3 \times \sin \theta_5 \times \sin \theta_7}$$

$$\text{令 } \frac{\sin 42^\circ50'06'' \times \sin 48^\circ04'30'' \times \sin 51^\circ05'25''}{\sin 56^\circ04'20'' \times \sin 33^\circ01'40'' \times \sin 47^\circ48'13''} = 1.174828543 = k,$$

$$\sin \theta_1 = k \cdot \sin \theta_2 \dots\dots(b), \quad (a) \text{ 代入 } (b), \text{ 得}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 &= k \times \sin(81^\circ06'10'' - \theta_1) = k \times (\sin 81^\circ06'10'' \times \cos \theta_1 - \cos 81^\circ06'10'' \times \sin \theta_1) \\ &= k \times \sin 81^\circ06'10'' \times \cos \theta_1 - k \times \cos 81^\circ06'10'' \times \sin \theta_1 \end{aligned}$$

$$(1 + k \times \cos 81^\circ06'10'') \times \sin \theta_1 = k \times \sin 81^\circ06'10'' \times \cos \theta_1$$

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} = \frac{k \times \sin 81^\circ06'10''}{1 + k \times \cos 81^\circ06'10''} = 0.9822208, \quad \theta_1 = 44^\circ29'10'', \quad \theta_2 = 36^\circ37'00''$$

(二) 進行四邊形鎖平差改正 各角改正值

1. 角條件：四邊形內角和=360°

$$\text{閉合差 } \omega_1 = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7 + \theta_8 - 360^\circ = 360^\circ 00' 24'' - 360^\circ = 24''$$

各角改正值 $v_1 = -\omega_1/8 = -24''/8 = -3''$ ，平差改正後，各角為：

$$\theta_1 = 44^\circ 29' 07'' , \theta_2 = 36^\circ 36' 57'' , \theta_3 = 56^\circ 04' 17'' , \theta_4 = 42^\circ 50' 03'' ,$$

$$\theta_5 = 33^\circ 01' 37'' , \theta_6 = 48^\circ 04' 27'' , \theta_7 = 47^\circ 48' 10'' , \theta_8 = 51^\circ 05' 22'' ,$$

2. 角條件：對頂角相等

$$\text{閉合差 } \omega_2 = (\theta_1 + \theta_2) - (\theta_5 + \theta_6) = 0 , \text{改正值 } v_2 = 0$$

閉合差 $\omega_3 = (\theta_3 + \theta_4) - (\theta_7 + \theta_8) = 48''$ ，改正值 $v_3 = -\omega_3/4 = -12''$ ，平差改正後，各角為：

$$\theta_1 = 44^\circ 29' 07'' , \theta_2 = 36^\circ 36' 57'' , \theta_3 = 56^\circ 04' 05'' , \theta_4 = 42^\circ 49' 51'' ,$$

$$\theta_5 = 33^\circ 01' 37'' , \theta_6 = 48^\circ 04' 27'' , \theta_7 = 47^\circ 48' 22'' , \theta_8 = 51^\circ 05' 34''$$

3. 邊條件平差改正 之改正值為 v_4

$$\text{閉合差 } \omega_4 = \frac{\sin \theta_1 \times \sin \theta_3 \times \sin \theta_5 \times \sin \theta_7}{\sin \theta_2 \times \sin \theta_4 \times \sin \theta_6 \times \sin \theta_8} - 1$$

$$\text{又 } \sin \theta_1 \times \sin \theta_3 \times \sin \theta_5 \times \sin \theta_7 = 0.234767887$$

$$\sin \theta_2 \times \sin \theta_4 \times \sin \theta_6 \times \sin \theta_8 = 0.234760999$$

$$\omega_4 = \frac{0.234767887}{0.234760999} - 1 = 2.933672 \times 10^{-5}$$

$$\text{改正值 } v_4 = -\frac{\omega_4}{\sum \cot \theta_i} \times \rho'' \quad \text{又}$$

$$\sum \cot \theta_i = \cot \theta_1 + \cot \theta_2 + \dots + \cot \theta_8 = 8.265373384$$

$$v_4 = -\frac{2.933672 \times 10^{-5}}{8.265373384} \times 206265'' = -0.73'' \approx -0.7''$$

令 $\theta_1, \theta_3, \theta_5, \theta_7$ 之改正值為 v_4 ， $\theta_2, \theta_4, \theta_6, \theta_8$ 之改正值為 $-v_4$ ，

平差改正後，各角為：

$$\theta_1 = 44^\circ 29' 06.3'' , \theta_2 = 36^\circ 36' 57.7'' , \theta_3 = 56^\circ 04' 04.3'' , \theta_4 = 42^\circ 49' 51.7'' ,$$

$$\theta_5 = 33^\circ 01' 36.3'' , \theta_6 = 48^\circ 04' 27.7'' , \theta_7 = 47^\circ 48' 21.3'' , \theta_8 = 51^\circ 05' 34.7''$$

四、測製 1/1000 數值航測地形圖時採用已知衛星控制點及水準點作為控制點，試說明其檢測原則及檢測標準。(25 分)

【考題難易】★★★★

【破題關鍵】關鍵字：1/1000 數值航測地形圖。

重點提要：控制點的檢測原則及檢測標準。

【擬答】

如採用已知衛星控制點及水準點作為控制點，在測製 1/1000 數值航測地形圖時

(一) 控制點的檢測原則

如依據 一千分之一數值航測地形圖測製作業規定：

1. 已知基本控制點檢測：以符合內政部「基本測量實施規則」加密控制測量相關規定之測量方法，檢測相鄰 3 個點位間之夾角及邊長，實測值與已知點坐標反算值相較差值，角度較差不超過 20 秒，邊長（經必要改正後）差比數不得大於二萬分之一。
2. 已知高程控制點檢測：採用直接水準測量檢測相鄰 2 點位間高程差，每測段往返閉合差不得大於 10 公釐 \sqrt{K} （K 為測段距離，以公里計），檢測高程差與原高程差比較差值，不得大於 10 公釐 \sqrt{K} （K 為水準路線長，以公里計）。山區得採用間接高程測量（垂直角觀測 2 測回並採對向觀測），測段距離超過 500 公尺時，應作大氣折光及地球曲率誤差改正，檢測高程差與原高程差比較差值，不得大於 7 公分 \sqrt{N} （N 為所經邊數）。

(二) 控制點的檢測標準

如依據 一千分之一數值航測地形圖成果檢查作業規定：

1. 已知平面控制點檢測
 - (1) 檢查數量：抽全數 10%以上，且不少於 4 點。
 - (2) 檢查內容：已知點清查及檢測是否符合作業規定。
 - (3) 通過標準：需全數合格，如有不符者建置單位應全面重新檢測後再送監審單位復查。
2. 已知高程控制點
 - (1) 檢查數量：抽全數 10%以上，且不少於 2 點。
 - (2) 檢查內容：已知點清查及檢測是否符合作業規定。
 - (3) 通過標準：需全數合格，如有不符者建置單位應全面重新檢測後再送監審單位復查。