110 年專技高考 土木技師試題

等　　別：高等考試
類　　科：土木工程技師
科　　目：結構分析(包括材料力學與結構學)

一、一彈性均勻鐵軌以強力扣件固定於間距為 $75cm$ 之軌枕，鐵軌之降伏應力為 $360MPa$，若其張應力及壓應力安全係數分別為 1.5 及 3.0。材料彈性模數為 $200GPa$，膨脹係數為 1.5×10^{-5}/℃。假設軌道固定軌枕時之溫度為 24℃，若扣件間完全無滑脫，試求該軌道之安全溫度範圍。(25分)

《考題難易》★★
《破題關鍵》
(1) 視扣件為固定端，溫度變化桿件產生之應力與長度無關。
(2) 溫度上升桿件內產生壓應力，需使用壓應力的安全係數；反之，溫度下降桿件內產生拉應力，需使用拉應力的安全係數

【擬答】
(一) 溫度升高產生軸壓應力

$$\frac{\sigma_y}{SF} \geq \sigma_c = E\alpha\Delta T$$

$$\Rightarrow \frac{360}{3} = 200 \times 10^3 \times 1.5 \times 10^{-5} \times (T_1 - 24°)$$

$$\Rightarrow T_1 \leq 64°$$

(二) 溫度下降產生軸拉應力

$$\frac{\sigma_y}{SF} \geq \sigma_t = E\alpha\Delta T$$

$$\Rightarrow \frac{360}{1.5} \geq 200 \times 10^3 \times 1.5 \times 10^{-5} \times (24° - T_2)$$

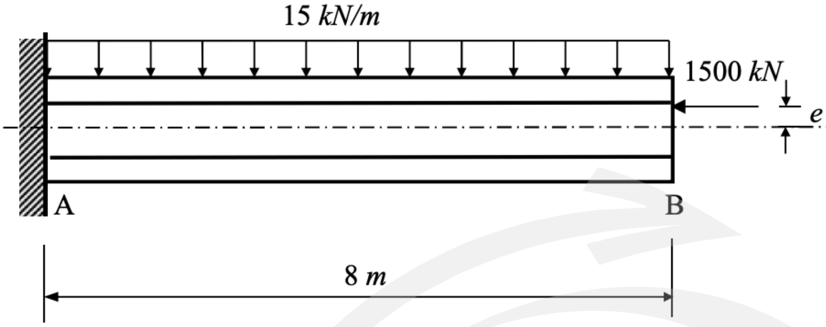
$$\Rightarrow T_2 \geq= -56°$$

答：軌道之安全溫度範圍在$-56°$及$64°$之間

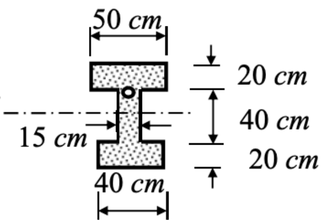
二、一 8m 長，上下不對稱斷面之 I 型懸臂梁承受一均布載重 15kN/m(如圖一(a)所示，斷面尺寸則如圖一(b)所示。今在其自由端點施加一具偏心距 e 之軸向壓力 1500kN。(25 分)

㈠ 試求可使梁斷面不產生張應力之最小偏心距。

㈡ 另求出前述最小偏心距時梁斷面之最大壓應力值。



圖一(a)



圖一(b)

《考題難易》★★★

《破題關鍵》

(1) A 截面的彎矩拉應力視彎矩為正方向還是負方向，決定其最大拉應力產生的位置。因此需考慮其為正或負的情況。

(2) A 截面的彎矩與 B 截面的彎矩狀況不同，且斷面為上下不對稱，因此在求最大壓應力時需 A 截面與 B 截面皆須計算後再比較。

【擬答】

設形心軸到下緣之距離Y_b

$$A = 50 \times 20 + 40 \times 15 + 20 \times 40 = 2400\ cm^2$$

$$Y_b = \frac{50 \times 20 \times 70 + 40 \times 15 \times 40 + 20 \times 40 \times 10}{2400} = 42.5\ cm$$

$$Y_t = 80 - 42.5 = 37.5\ cm$$

此截面對形心軸之慣性矩I_x

$$I_x = \frac{1}{3} \times [50 \times 37.5^3 - 35 \times (37.5 - 20)^3 + 40 \times 42.5^3 - 25 \times (42.5 - 20)^3] = 1745000\ cm^4$$

㈠ 可使梁斷面不產生張應力之最小偏心距

1. 在 A 截面的拉應力

$$M_A=\frac{1}{2}\times 15\times 8^2\times 10^2-1500e=48000-1500e\ \ kN\cdot cm(\circlearrowright)$$

若M_A為零則$48000-1500e=0\Rightarrow e=32\ cm$

若M_A為負彎矩$(e<32\ cm)$則彎矩拉應力在斷面上緣

$$\sigma=\frac{(48000-1500e)\times 37.5}{1745000}\le\frac{N}{A}=\frac{1500}{2400}=0.625\ {}^{kN}/_{cm^2}$$

$\Rightarrow 32>e\ge 12.6\ cm$

若M_A為正彎矩$(e>32\ cm)$則彎矩拉應力在斷面下緣

$$\sigma=\frac{-(48000-1500e)\times 42.5}{1745000}\le\frac{N}{A}=\frac{1500}{2400}=0.625\ {}^{kN}/_{cm^2}$$

$\Rightarrow 32<e\le 49.1\ cm$

2. 在 B 截面的拉應力

$M_B=1500e(\circlearrowleft)$

M_B為正彎矩則彎矩拉應力在斷面下緣

$$\sigma=\frac{(1500e)\times 37.5}{1745000}\le\frac{N}{A}=\frac{1500}{2400}=0.625\ {}^{kN}/_{cm^2}\Rightarrow e\le 17.1\ cm$$

綜上所述可使梁斷面不產生張應力之最小偏心距$e=12.6\ cm$

㈡ 前述最小偏心距時梁斷面之最大壓應力值

在 A 截面的壓應力

$$\sigma_A=0.625+\frac{(48000-1500\times 12.6)\times 42.5}{1745000}=1.334\ {}^{kN}/_{cm^2}=13.34\ MPa$$

在 B 截面的壓應力

$$\sigma_B=0.625+\frac{1500\times 12.6\times 37.5}{1745000}=1.031\ {}^{kN}/_{cm^2}=10.31\ MPa$$

最小偏心距時梁斷面之最大壓應力值為$13.34\ MPa$

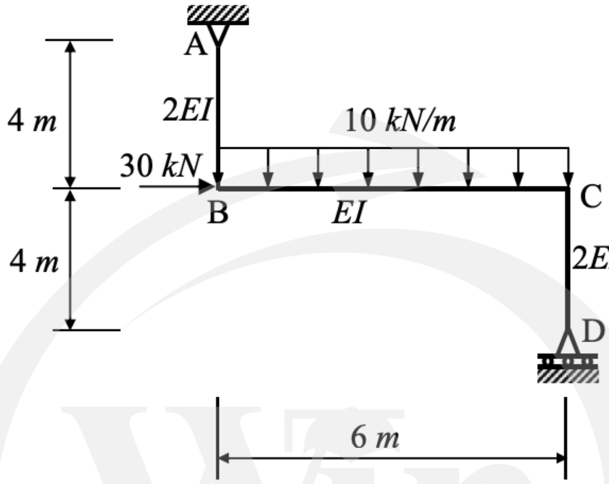
答：㈠ 使梁斷面不產生張應力之最小偏心距$e=12.6\ cm$

㈡ 前述最小偏心距時梁斷面之最大壓應力值為$13.34\ MPa$

三、如下圖二所示之一靜定剛架結構系統 ABCD，其中 A 端為鉸支承、D 端為輥支承。AB、CD 桿長 4m，撓曲剛度為 $2EI$，B 節點承受一向右集中載重 $30kN$。BC 桿桿長 6m，撓曲剛度則為 EI，承受一向下之均布載重 $10kN/m$。(25 分)

㈠ 試求此系統之撓曲應變能(strain energy)。

㈡ 另請以單位載重法或其他任意方法求 C 節點與 D 端點水平變位之比值。



圖二

《考題難易》：★★★☆☆

《解題關鍵》：

本題為靜定結構，可先由平衡條件解得內力，再由力法求解，求解積分式時亦可用面積一次矩法。

【擬答】

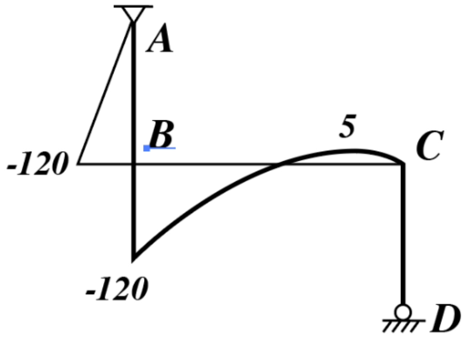
㈠ 求反力：設 A、D 之反力分別為 A_X、A_y、D_y

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow A_X=-30$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 4\text{x}30 - (\frac{2}{6})(10\times 6) + 6Dy = 0 \Rightarrow Dy = 10$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 6\times 10 + 10 = 0 \Rightarrow A_y = 50$$

㈡ M-dia



$\boxed{AB}$ $M_{AB}(x)$=-30x

$\boxed{BC}$ $V_{CB}(x)$=10-10x (以 C 為原點)

$\Rightarrow M_{CB}(x)$=10-5x^2

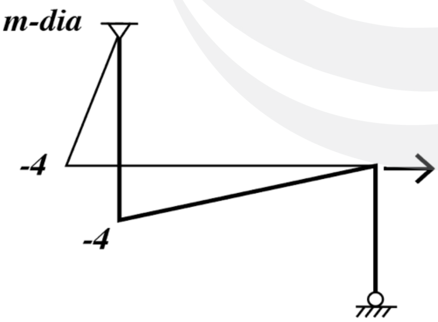
㈢ Strain energy

$$U=\int\frac{M^2}{2EI}dx=\int_0^4\frac{(-30x)^2}{2(2EI)}dx+\int_0^6\frac{(10X-5x^2)^2}{2EI}dx$$

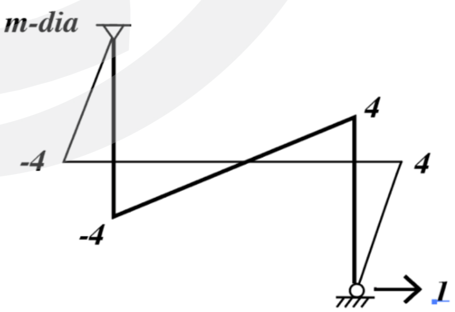
$$=\frac{4800}{EI}+\frac{6840}{EI}=\frac{11640}{EI} \quad \# \quad \left(\frac{m^3\bullet(KN)^2}{EI}\right)$$

㈣ Virtual load $\Rightarrow$求 virtaul moment m(x)

(a)施於 c



(b) 施 1 單位力於 D



㈤ 求變位

$$\Delta_c = \int \frac{mM}{EI} dX = \int_0^4 \frac{(-x)(-30x)}{2EI} dx + \int_0^6 \frac{(\frac{-2}{3}x)(10x-5x^2)}{EI} dx$$

$$= \frac{320}{EI} + \frac{600}{EI} = \frac{920}{EI}$$

$$\Delta_D = \int \frac{mM}{EI} dX = \int_0^4 \frac{(-x)(-30x)}{2EI} dx + \int_0^6 \frac{(4-\frac{4}{3}x)(10x-5x^2)}{EI} dx$$

$$= \frac{800}{EI}$$

(Note ：上二式建議可用面積一次矩計算，詳見課本)

補充：

Note: 求解Δ_C與Δ_D之積分式亦可利用面積一次矩計算

$$\int_0^4 \frac{-x(-30x)}{2EI} dx = \frac{15}{EI}\int_0^4 x^2 dx = \frac{320}{EI}$$

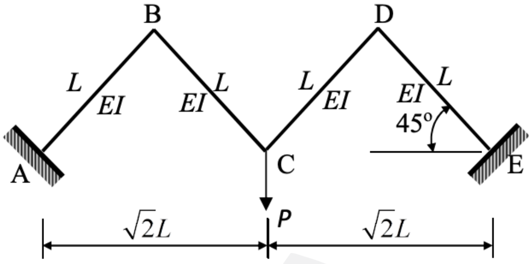
$$\int_0^6 \frac{\left(-\frac{2}{3}x\right)(10x-5x^2)}{EI} dx = \frac{1}{EI}\left(6\cdot\frac{60}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\cdot 4\right) - \frac{5}{EI}\left(6\cdot 36\cdot\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot 6\right)\right) = \frac{600}{EI}$$

$$\int_0^6 \frac{\left(4-\frac{4}{3}x\right)(10x-5x^2)}{EI} dx = \frac{1}{EI}\left(6\cdot\frac{60}{2}\right)\left(4-\frac{4}{3}\cdot 4\right) - \frac{5}{EI}\left(6\cdot 36\cdot\frac{1}{3}\right)\left(4-\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot 6\right)\right) = \frac{480}{EI}$$

上三項中，前二項楷庸個人會直接積分，最後一項會選擇面積一次矩法。

$$\Rightarrow \frac{\Delta_c}{\Delta_D} = \frac{920}{800} = 1.15$$

四、一對稱剛架系統 ABCDE 具四根桿件以直角相接，各桿長度皆為 L，彎曲剛度皆為 EI。現於 C 節點承受一集中載重 P 如下圖三所示，試求各端點彎矩及 C 節點垂直變位。(25 分)



圖三

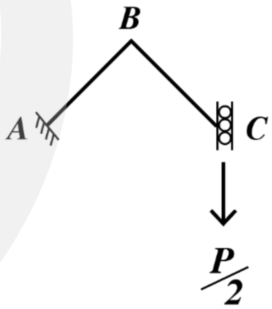
考題難易：★★☆☆☆

解題關鍵：本題為左右正對稱問題 θc = 0，可簡化至二自由度 (θB、Δc)

【擬答】

〈傾角變位法〉

㈠ 變位諧合



$$\sum\Delta_x = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}L}{2}R_{AB} - \frac{\sqrt{2}L}{2}R_{BC} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum\Delta_y = \Delta_c \Rightarrow \frac{\sqrt{2}L}{2}R_{AB} + \frac{\sqrt{2}L}{2}R_{BC} = \Delta_c \qquad (2)$$

㈡ M_{ij}

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}(\theta_B - 3R_{AB})$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}(2\theta_B - 3R_{AB})$$

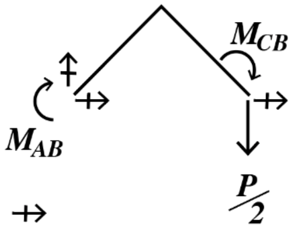
$$M_{BC} = \frac{2EI}{L}(2\theta_B - 3R_{BC})$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{L}(\theta_B - 3R_{CB})$$

㈢ 平衡

$\boxed{B}\ \sum M_B = 0 \Rightarrow M_{BA} + M_{BC} = 0$ (3)

$\boxed{ABC} \sum M_A = 0 \Rightarrow M_{AB} + M_{CB} + \sqrt{2}L(\frac{p}{2}) = 0$ (4)



(1) (3)(4)

$$\Rightarrow \theta_B = \frac{\sqrt{2}PL^2}{8EI}，R_{AB} = R_{BC} = \frac{\sqrt{2}PL^2}{12EI}$$

(2)

$$\Rightarrow \Delta_C = \frac{PL^3}{6EI}$$

$$\Rightarrow M_{AB} = -\frac{\sqrt{2}}{4}PL$$

$$M_{BA} = 0$$

$$M_{BC} = 0$$

$$M_{CB} = -\frac{\sqrt{2}}{4}PL$$

$$\Rightarrow (M_A，M_B，M_C，M_D，M_E) = (\frac{-\sqrt{2}}{4}，0，\frac{\sqrt{2}}{4}，0，\frac{-\sqrt{2}}{4})PL$$

NOTE：