

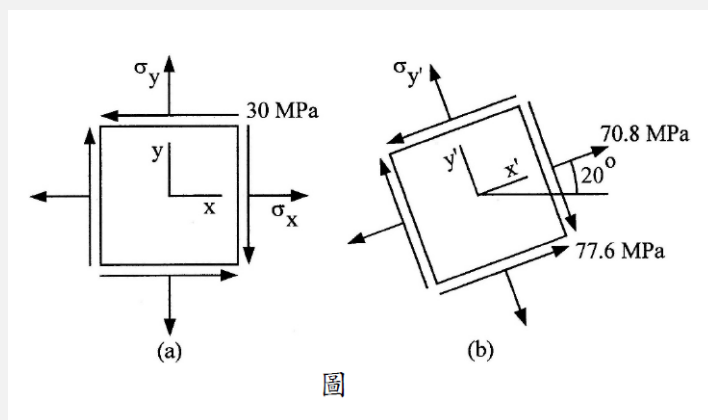
111 年專技高考 土木技師試題

等 別：高等考試
類 科：土木工程技師
科 目：結構分析(包括材料力學與結構學)

一、有一平面應力元素受應力如下圖(a)所示，當此元素逆中向旋轉 20° 後，其應力狀況如下圖(b)所示。假設此應力元素之彈性模數 $E = 25 \text{ GPa}$ ，柏松比 $\nu = 0.2$ ，請計算應力 σ_x 、 σ_y 及此元素在 x 及 y 座標系統下之應變 ϵ_x 、 ϵ_y 、 γ_{xy} 。(20 分)

$$\text{提示：} \sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta,$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$



《考題難易》★★

《考題重點》平面應力在應變求解時要使用到廣義虎克定律。

剪力彈性模數 G 的記憶式子

【擬答】：

由題意可知，設拉應力為正，剪應力逆時為正

$$\sigma_{x'} = 70.8 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = -30 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = -77.6 \text{ MPa}$$

$$\theta = 20^\circ$$

(a)應力

設A及B為下式

$$A = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, B = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

則

$$\sigma'_x = A + B \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$A + B \cos 40^\circ - 30 \sin 40^\circ = 70.8 \text{ MPa} \cdots (1)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$-B \sin 40^\circ - 30 \cos 40^\circ = -77.6 \text{ MPa} \cdots (2)$$

由□式得

$$B = \frac{-77.6 + 30 \cos 40^\circ}{-\sin 40^\circ} = 84.97 \text{ MPa}$$

B 代入□得

$$A + 84.97 \cos 40^\circ - 30 \sin 40^\circ = 70.8 \text{ MPa} \Rightarrow A = 24.99 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x = A + B = 24.99 + 84.97 = 110 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = A - B = 24.99 - 84.97 = -60 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_y = \sigma_x + \sigma_y - \sigma'_x = 110 - 60 - 70.8 = -20.8 \text{ MPa}$$

(b)應變

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_y = \frac{1}{25 \times 10^3} (110 + 0.2 \times 60) \Rightarrow \varepsilon_x = 4.88 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_x = \frac{1}{25 \times 10^3} (-60 - 0.2 \times 110) \Rightarrow \varepsilon_y = -3.28 \times 10^{-3}$$

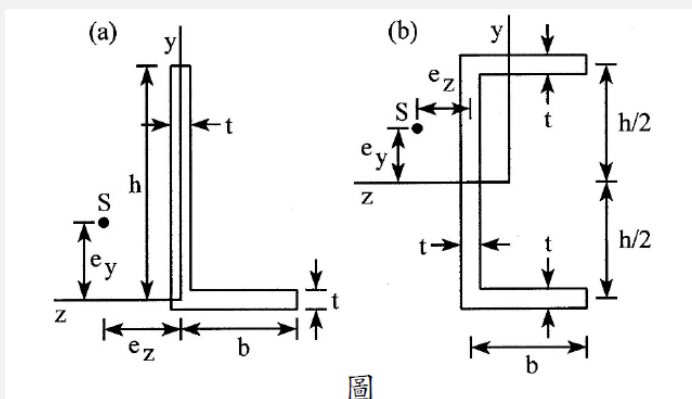
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{25}{2(1+0.2)} = 10.42 \text{ GPa}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{-30}{10.42 \times 10^3} = -2.88 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

答： $\sigma_x = 110 \text{ MPa}$ (拉應力)， $\sigma_y = -60 \text{ MPa}$ (壓應力)

$\varepsilon_x = 4.88 \times 10^{-3}$ (拉應變)， $\varepsilon_y = -3.28 \times 10^{-3}$ (壓應變)， $\gamma_{xy} = -2.88 \times 10^{-3} \text{ rad}$ (逆時)

二、有二薄管壁梁之斷面如下圖(a)及(b)所示，試計算各梁斷面剪力中心 S 之 e_y 及 e_z 值。(20 分)



《考題難易》★★

《考題重點》特殊斷面的剪力中心的判斷。

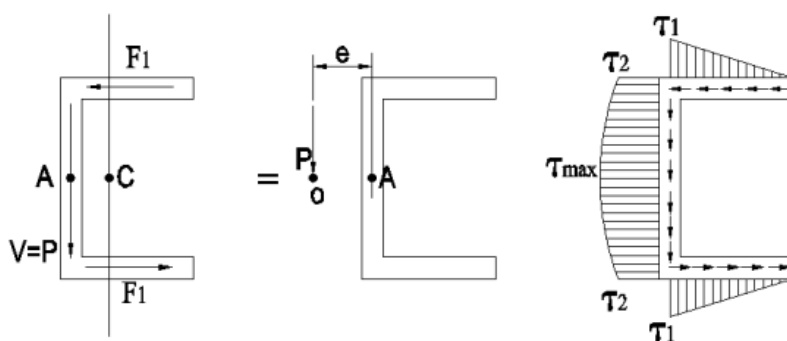
剪力中心位置求解條件為對翼板和腹板中心線交點取力矩和。

【擬答】：

(a) 圖(a)為 L 形斷面

L 形斷面內兩個矩形版的剪力流合力通過此兩個版的中心軸(y 軸及 z 軸)的交點，因此剪力中心為此焦點，故 $e_y = 0$ ， $e_z = 0$

(b) 圖(b)為 C 形斷面

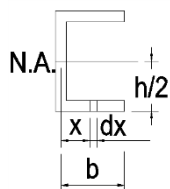


垂直向下剪力 V 施加在斷面上，會使得剪流通過翼板和腹板，在翼板和腹板內產生合力 F_1 和 V 。

C 形斷面對 z 軸對稱， F_1 對剪力中心的力矩和為零，因此剪力中心位於 z 軸上，故 $e_y = 0$

$$I = \frac{1}{12}th^3 + 2\left[bt\left(\frac{h}{2}\right)^2\right] = \frac{th^2}{2}\left(\frac{h}{6} + b\right)$$

在翼板之任意位置 x 之剪力流 f



$$f = \frac{VQ}{I} = \frac{V\left(\frac{h}{2}\right)[b-x]t}{\frac{th^2}{2}\left(\frac{h}{6} + b\right)} = \frac{V(b-x)}{h\left[\left(\frac{h}{6}\right) + b\right]}$$

$$F_1 = \int_0^b f dx = \frac{V}{h\left[\left(\frac{h}{6}\right) + b\right]} \int_0^b (b-x) dx = \frac{Vb^2}{2h\left[\left(\frac{h}{6}\right) + b\right]}$$

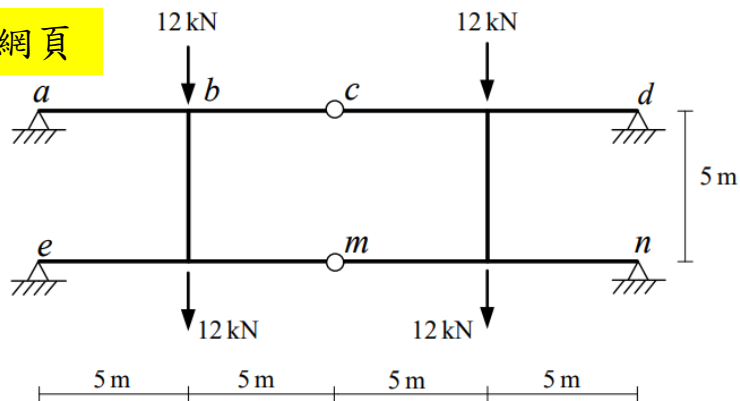
剪力中心：對翼板和腹板中心線交點取力矩和

$$Ve_z = F_1 h = \frac{Vb^2 h}{2h\left[\left(\frac{h}{6}\right) + b\right]} \Rightarrow e_z = \frac{b^2}{\left(\frac{h}{3} + 2b\right)} = \frac{3b^2}{(h + 6b)}$$

答：圖(a) L 形斷面為 $e_y = 0$, $e_z = 0$, 圖(b) C 形斷面為 $e_y = 0$, $e_z = \frac{3b^2}{(h+6b)}$

三、如下圖所示之平面剛架結構， a 、 d 、 e 、 n 點為鉸支承， c 點及 m 點為鉸接，各桿件有相同之彈性模數 E 與慣性矩 I ，且 $EI=250000 \text{ kN-m}^2$ 。不考慮各桿件的軸向變形，求 ab 桿件的端點彎矩、此結構系統之撓曲應變能、 b 點及 c 點垂直位移。(30 分)

取自考選部網頁



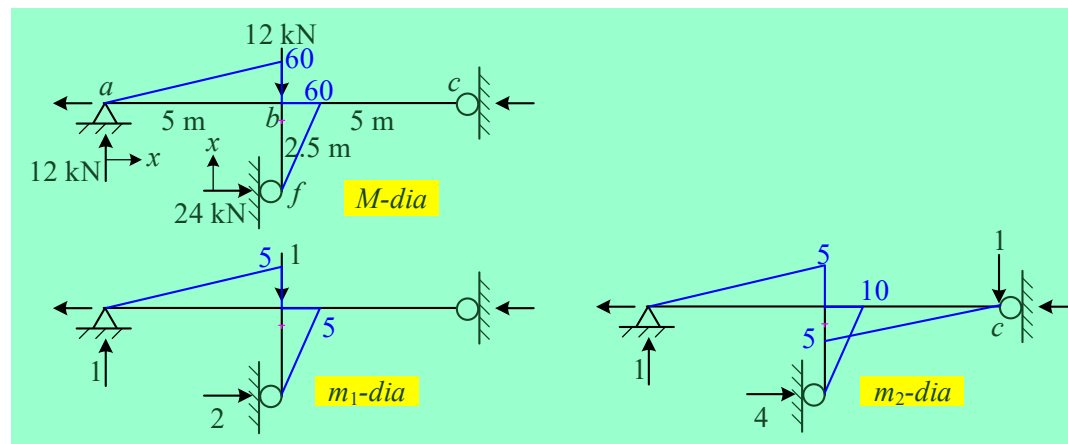
(2) ab 桿件之桿端彎矩 M_{ab} 及 M_{ba}

$$M_{ab}=0, M_{ba}=12(5)=60 \text{ kN-m (逆鐘向)}$$

(3) 本構架應變能 U

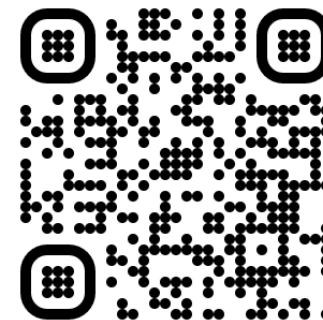
$$\begin{aligned} U &= \int \frac{M^2 dx}{2EI} = (4) \frac{1}{2EI} \left[\int_0^{2.5} (24x)^2 dx + \int_0^5 (12x)^2 dx \right] \\ &= \frac{4}{2EI} \left(\frac{576x^3}{3} \Big|_0^{2.5} + \frac{144x^3}{3} \Big|_0^5 \right) = \frac{4}{2EI} [192(15.625) + 48(125)] \\ &= 0.072 \text{ kN-m} \end{aligned}$$

(1) 本構架左右對稱，對稱軸通過之斷面不存在剪力內力且構架上下反對稱，對稱軸通過之斷面不存在軸力內力只須分析如下 M - dia 圖之四分之一構架，其他部分以左右對稱上下反對稱處理

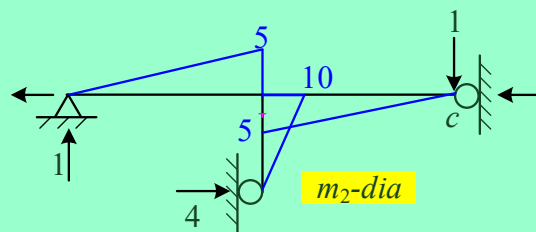
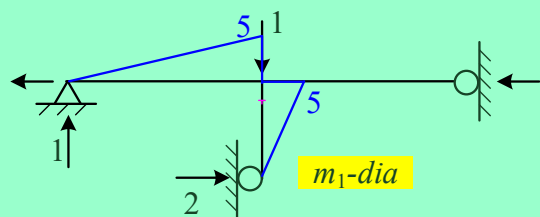
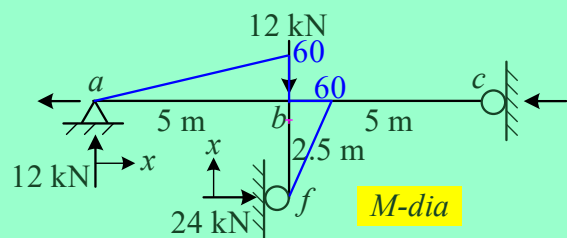
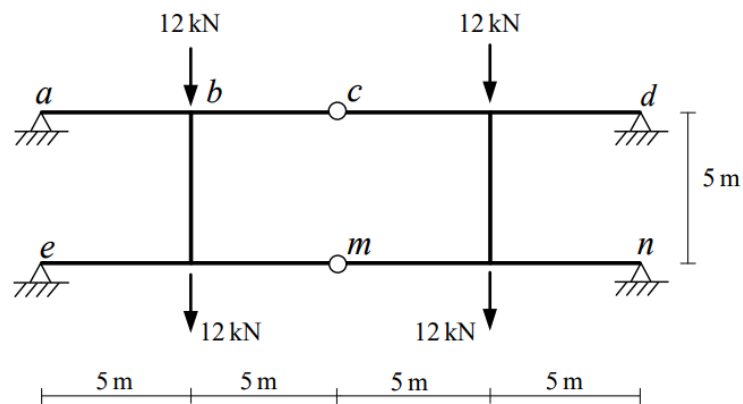


ab 桿及 bf 桿必彎曲， bc 桿無彎曲
所有桿忽略軸向變形。

影音觀看- 名師線上完整解析



如下圖所示之平面剛架結構， a 、 d 、 e 、 n 點為鉸支承， c 點及 m 點為鉸接，各桿件有相同之彈性模數 E 與慣性矩 I ，且 $EI=250000 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$ 。不考慮各桿件的軸向變形，求 ab 桿件的端點彎矩、此結構系統之撓曲應變能、 b 點及 c 點垂直位移。(30 分)



(4) b 點垂直位移 Δ_{bV}

參考 M - dia 及 m_1 - dia 由單位力法

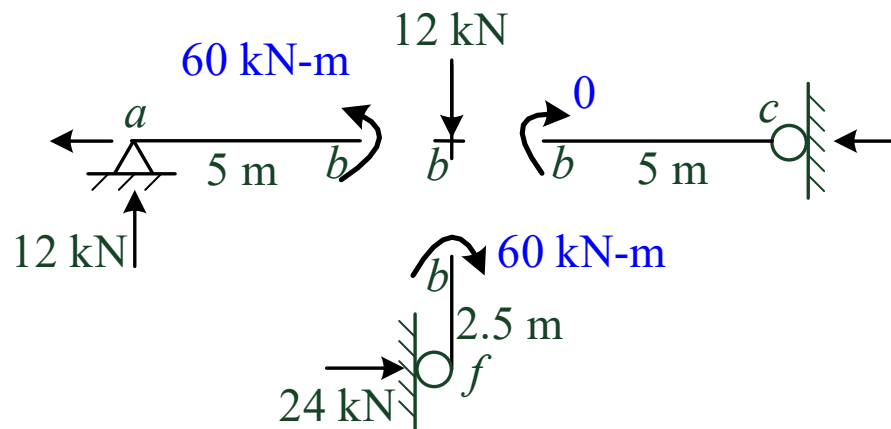
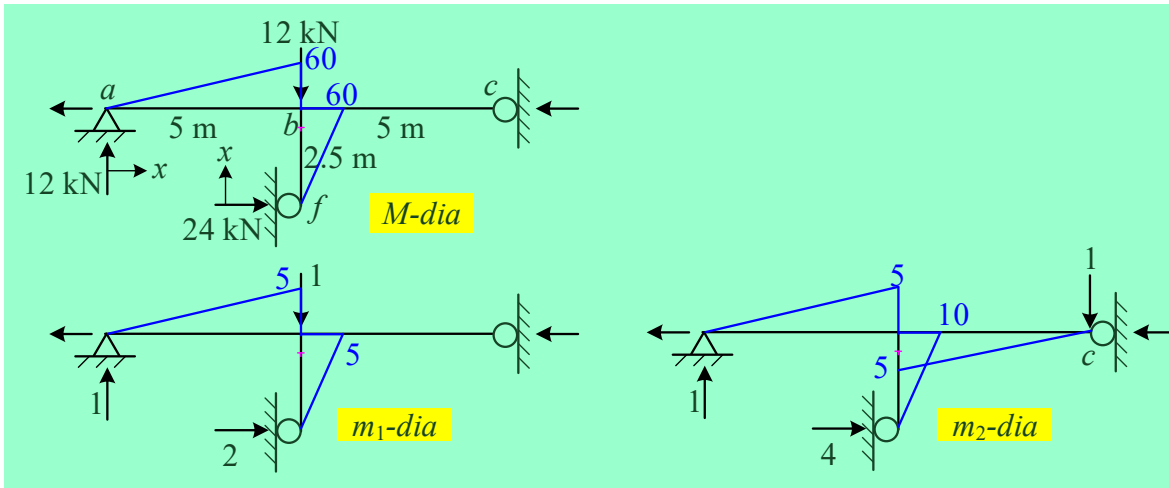
$$1 \cdot \Delta_{bV} = \int \frac{Mm_1 dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2}(5)60(5)\frac{2}{3} + \frac{1}{2}(2.5)60(5)\frac{2}{3} \right] \\ = \frac{1}{3EI} (1500 + 750) = 0.003 \text{ m} = 3 \text{ mm} (\downarrow)$$

(5) c 點垂直位移 Δ_{cV}

參考 M - dia 及 m_2 - dia 由單位力法

$$1 \cdot \Delta_{cV} = \int \frac{Mm_2 dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2}(5)60(5)\frac{2}{3} + \frac{1}{2}(2.5)60(10)\frac{2}{3} \right] \\ = \frac{1}{3EI} (1500 + 1500) = 0.004 \text{ m} = 4 \text{ mm} (\downarrow)$$

接續下頁



$EI = \text{常數} = 250000 \text{ kN-m}$

(6) 檢視答案

利用傾角變位方程式

$$M_{ba} = 2 \left(\frac{EI}{5} \right) \left[1.5\theta_b - (1.5) \frac{\Delta_{bV}}{5} \right] = -60 \quad (a)$$

$$M_{bc} = 2 \left(\frac{EI}{5} \right) \left[1.5\theta_b - (1.5) \frac{(\Delta_{cV} - \Delta_{bV})}{5} \right] = 0 \quad (b)$$

$$M_{bf} = 2 \left(\frac{EI}{2.5} \right) [1.5\theta_b] = 60 \quad (c)$$

$$\text{由}(c) \theta_b = \frac{150}{3EI} = 2(10^{-4}) \text{ rad}$$

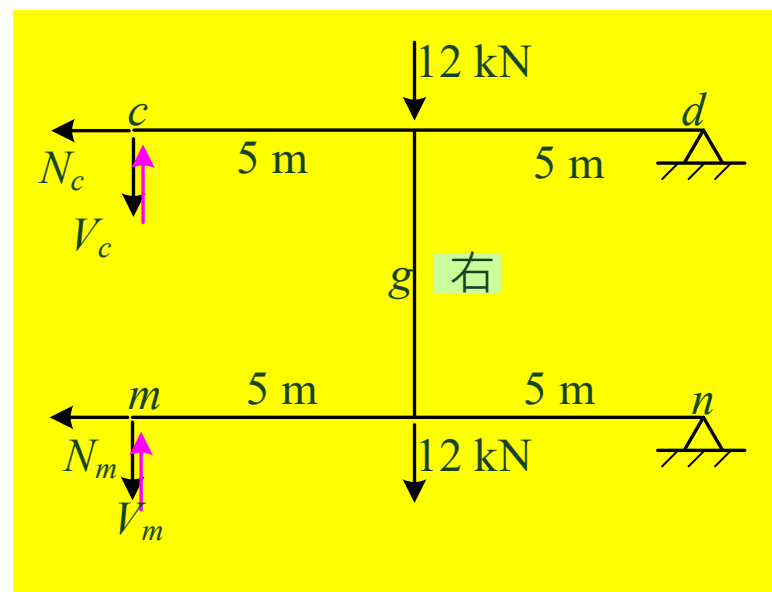
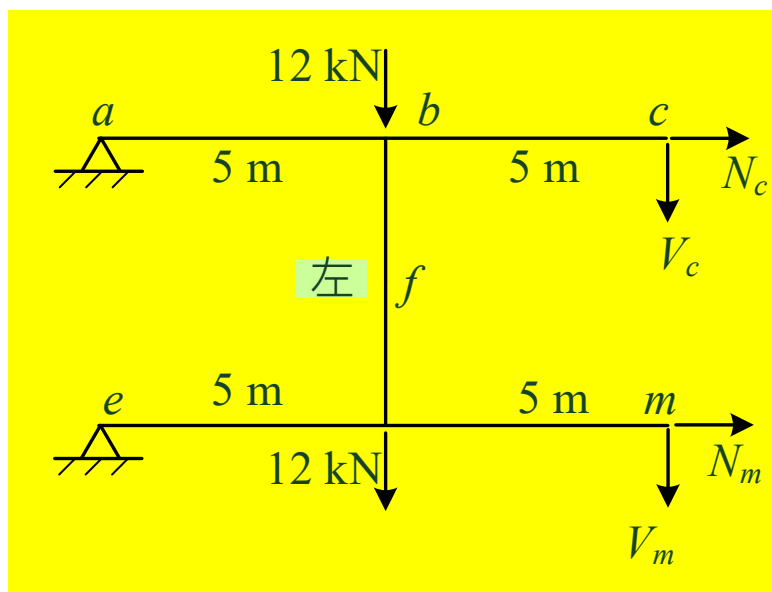
$$\text{代回}(a) \Delta_{bV} = 3(10^{-3}) \text{ m} = 3 \text{ mm} (\downarrow)$$

$$\text{再代回}(b) \Delta_{cV} = 4(10^{-3}) \text{ m} = 4 \text{ mm} (\downarrow)$$

補充

此題的重點在哪?

- (1) 本構架左右對稱，對稱軸通過之斷面不存在剪力內力
且構架上下反對稱，對稱軸通過之斷面不存在軸力內力
只須分析如下 $M - dia$ 圖之四分之一構架，其他部分以左右對稱上下反對稱處理



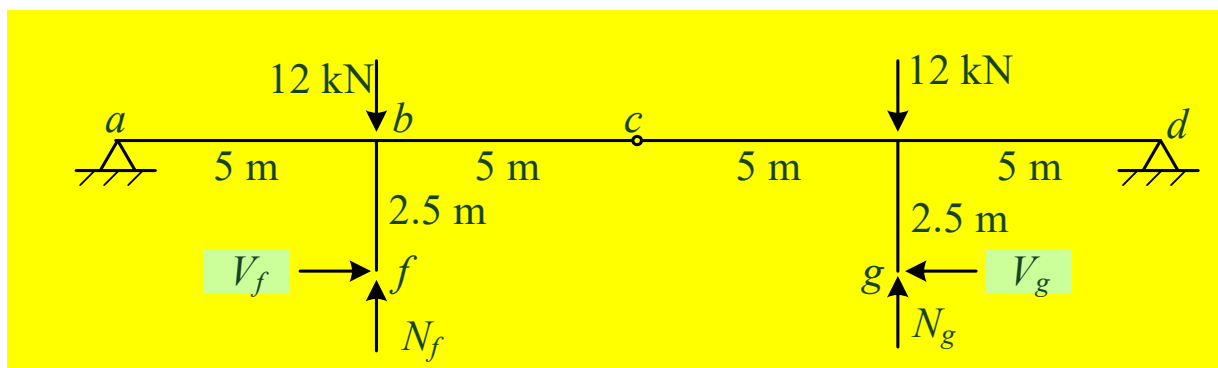
左右對稱 V_c, V_m 必為零， N_c, N_m 未知

不該強背結論，要繪分離體圖!

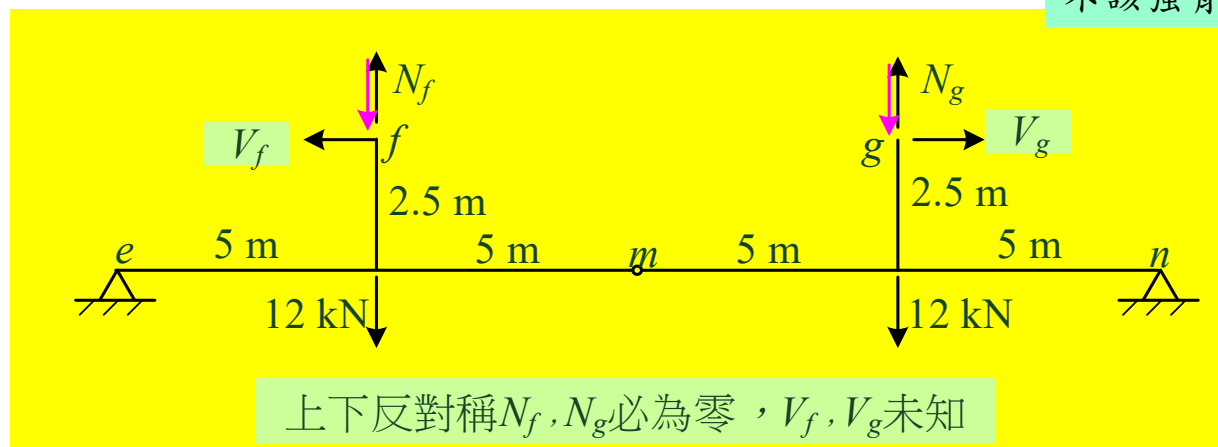
接續下頁

補充

- (1) 本構架左右對稱，對稱軸通過之斷面不存在剪力內力
且構架上下反對稱，對稱軸通過之斷面不存在軸力內力
只須分析如下 $M - dia$ 圖之四分之一構架，其他部分以左右對稱上下反對稱處理

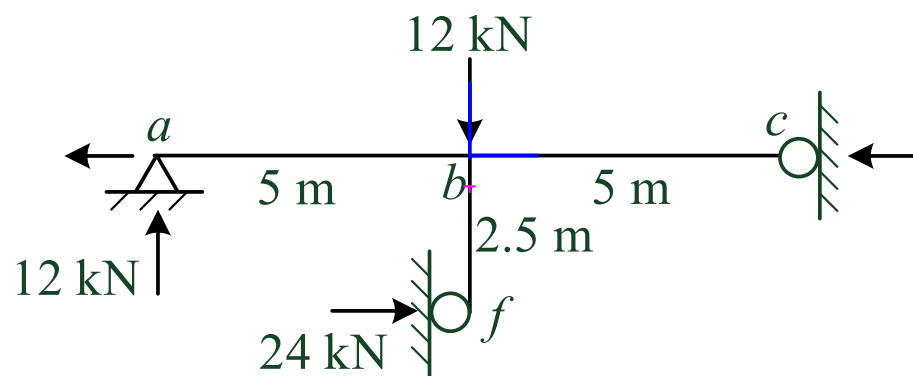


不該強背結論，要繪分離體圖！



上下反對稱 N_f, N_g 必為零， V_f, V_g 未知

補充



$$\Sigma M_a = 0, H_f = \frac{12(5)}{2.5} = 24 \text{ kN}(\rightarrow)$$

$$\Sigma F_y = 0, V_a = 12 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$\Sigma F_x = 0, H_a + H_c = 0$$

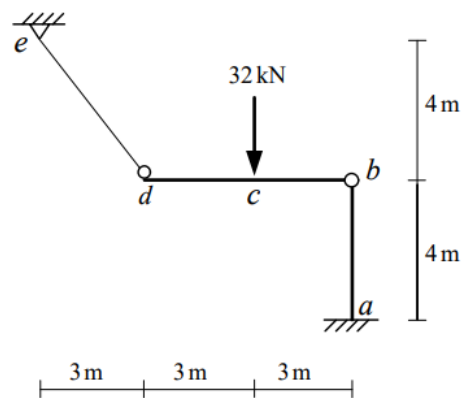
此分離體取 a 點力矩平衡，得 f 點水平反力為 $12(5)/2.5=24 \text{ kN}$ 朝右
取垂直力平衡得 a 點垂直反力為 12 kN 朝上，取水平力平衡無法
得知 a 與 c 點水平反力，但無損求構架之應變能與節點變位及繪
彎矩圖

心算足夠矣!

解出此題的關鍵是正確的力學觀念，無法在解題講座上全部說清楚，
還得靠平時的戰力養成!

四、如下圖所示結構，承受垂直集中載重 32 kN， a 點為固定端， e 點為鉸支承， b 點為鉸接，點 d 連接一軸力桿件 de ，桿件 de 彈性模數 E 與斷面積 A 之乘積為 $EA=62500$ kN，而桿件 ab 及 bd 有相同之彈性模數 E 與慣性矩 I ，且 $EI=60000$ kN-m²。若不考慮桿件 ab 及 bd 的軸向變形，求 a 點固定端反力（含彎矩）、 de 桿件軸力、 c 點及 d 點垂直位移。（30 分）

取自考選部網頁



(1) 本構架穩定、靜定。由鉸接點處切開成三個分離體如圖(a)

其中 bcd 分離體為平面不平行、不共點力系。由 $\sum M = 0$ ， $\sum F_x = 0$ ， $\sum F_y = 0$ 得其端點力如圖，再往 ba 及 de 分離體傳力，得分析結果之大小及方向如圖示，其中 a 端彎矩為 48 kN-m，水平反力朝右 12 kN，垂直反力朝上 16 kN， de 桿軸拉力為 20 kN

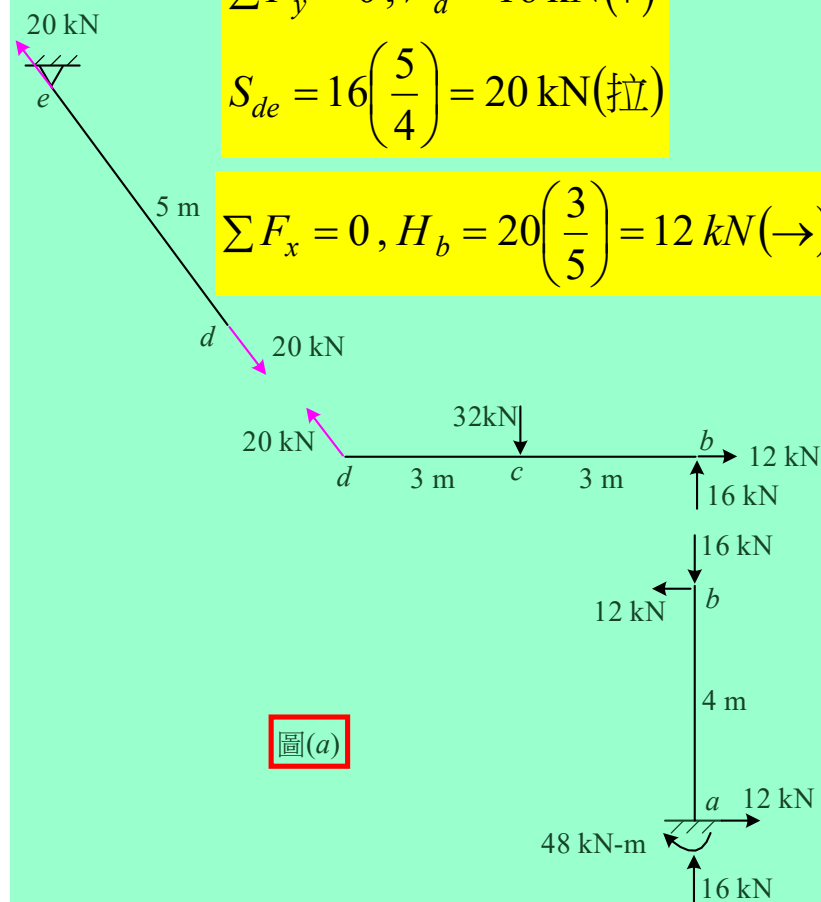
ba 桿被往左拉彎， bcd 桿被往下壓彎， de 桿被拉長

$$\sum M_d = 0, V_b = \frac{32(3)}{6} = 16 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0, V_d = 16 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$S_{de} = 16\left(\frac{5}{4}\right) = 20 \text{ kN}(\text{拉})$$

$$\sum F_x = 0, H_b = 20\left(\frac{3}{5}\right) = 12 \text{ kN}(\rightarrow)$$



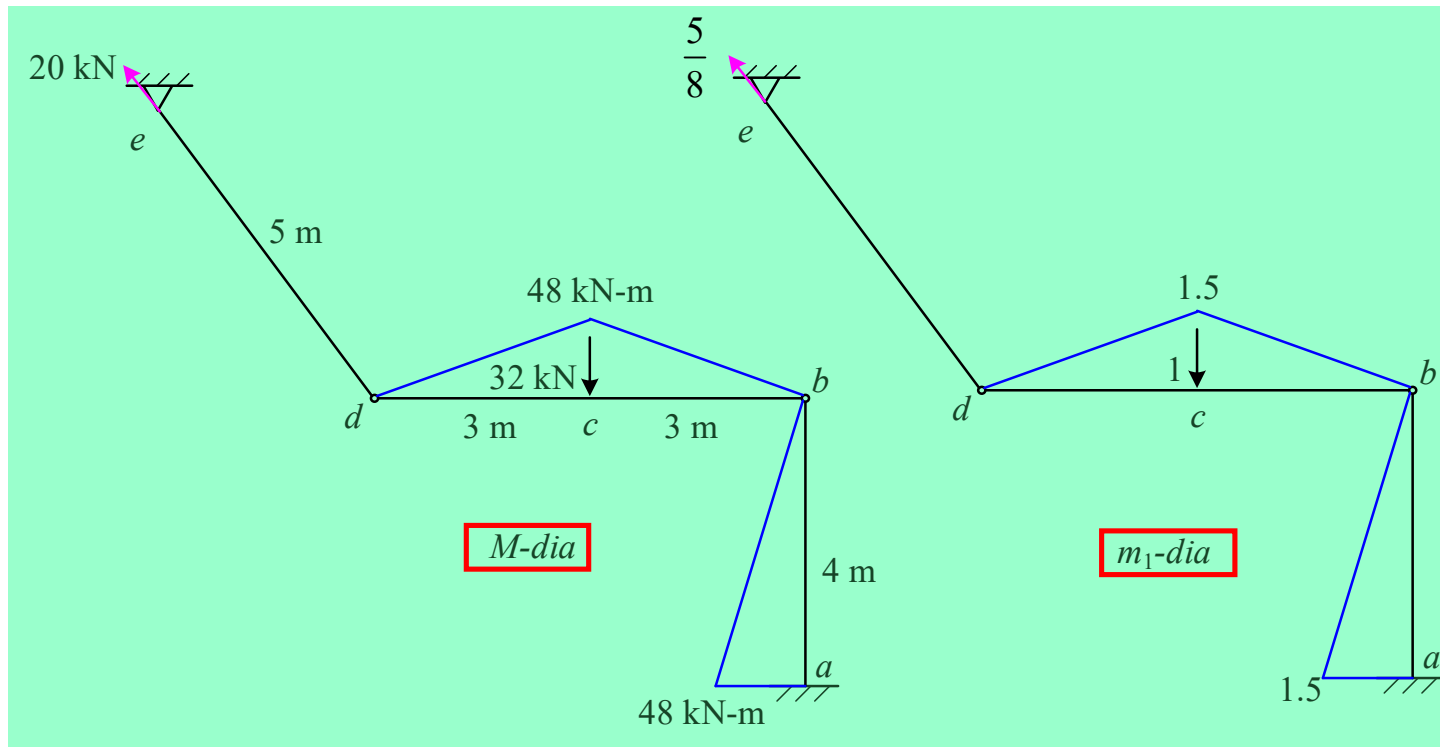
圖(a)

(2) 求 c 點垂直位移 Δ_{cv}

由 M - dia 及 m_1 - dia

$$1 \cdot \Delta_{cv} = \int \frac{Mm_1 dx}{EI} + \frac{Su_1 L}{AE} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (48) 4 (1.5) \frac{2}{3} + (2) \frac{1}{2} (48) 3 (1.5) \frac{2}{3} \right] + \frac{1}{AE} \left[20 \left(\frac{5}{8} \right) 5 \right]$$

$$= \frac{(96 + 144)}{EI} + \frac{62.5}{AE} = 0.004 \text{ m} + 0.001 \text{ m} = 5 \text{ mm} (\downarrow)$$

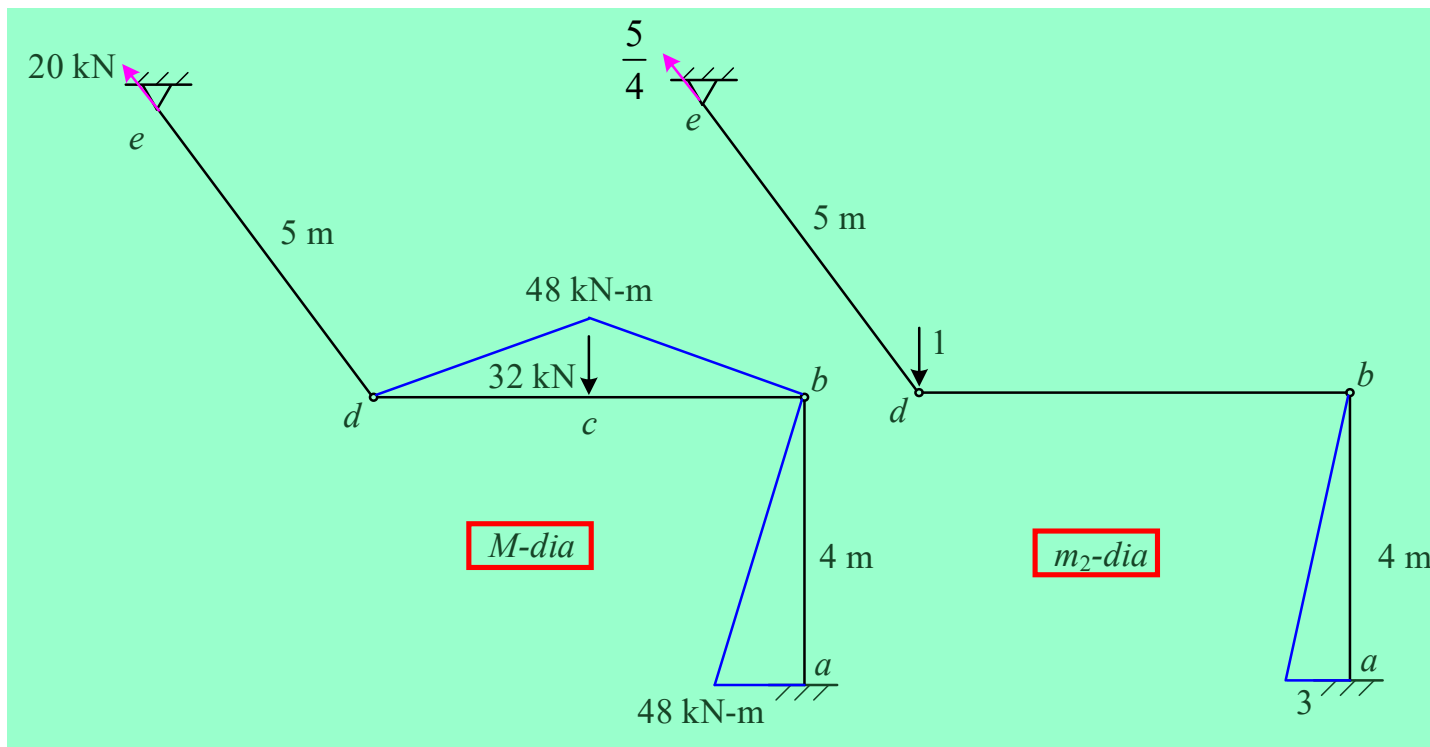


(3) 求 d 點垂直位移 Δ_{dv}

由 M - dia 及 m_2 - dia

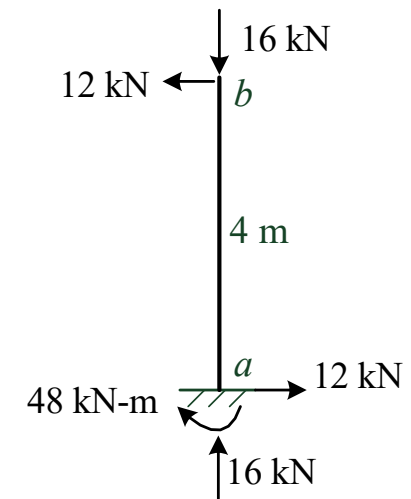
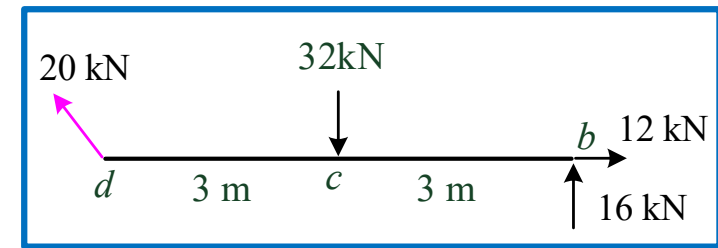
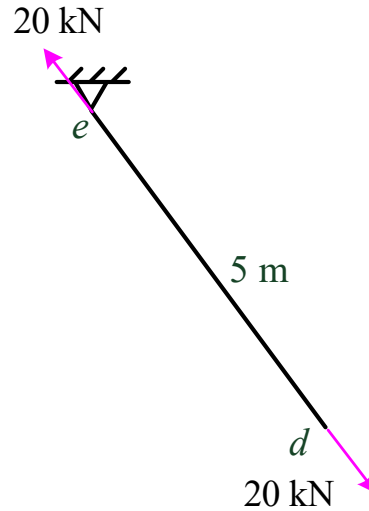
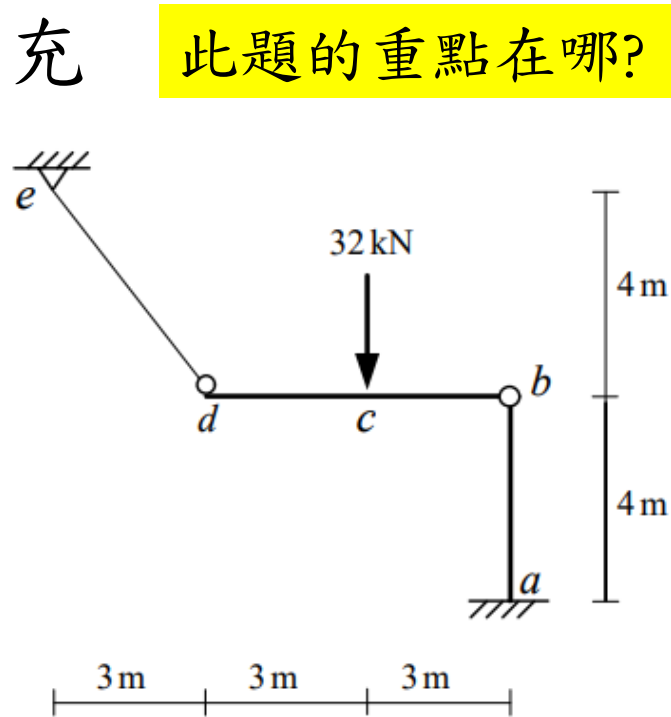
$$1 \cdot \Delta_{dv} = \int \frac{Mm_2 dx}{EI} + \frac{Su_2 L}{AE} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (48) 4 (3) \frac{2}{3} \right] + \frac{1}{AE} \left[20 \left(\frac{5}{4} \right) 5 \right]$$

$$= \frac{192}{EI} + \frac{125}{AE} = 0.0032 \text{ m} + 0.002 \text{ m} = 5.2 \text{ mm} (\downarrow)$$



補充

此題的重點在哪?



1. 靜定或靜不定? 結構系統? 靜定! 左斜桿與右立柱穩住水平桿!

2. 力傳路徑? 從bcd往兩旁傳!

3. 取分離體可解? 可!

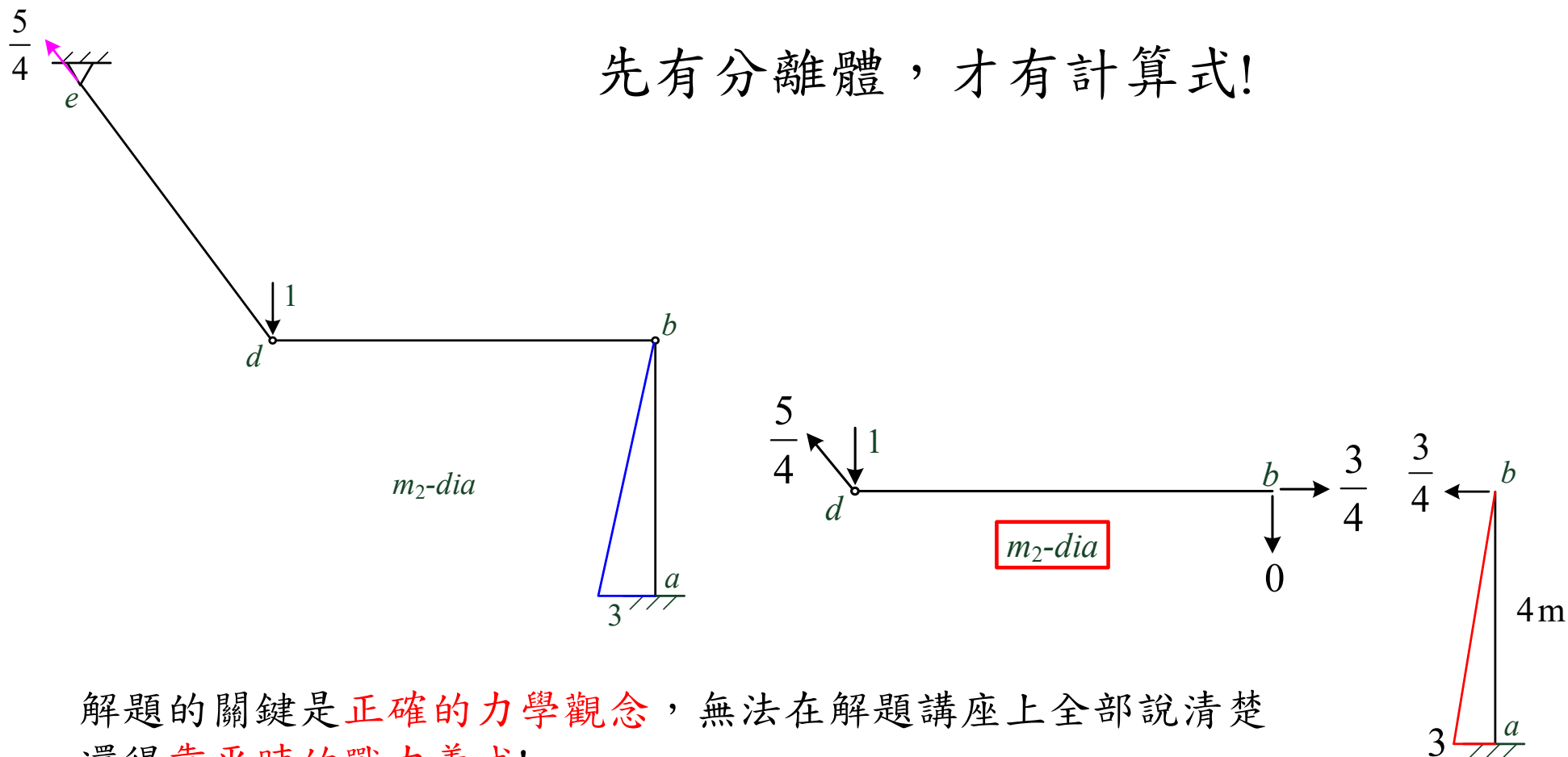
4. 從哪一個分離體下手? 為何? bcd! 如同簡支梁!

5. 心算足夠? 足夠!

補充

取分離體技巧!

先有分離體，才有計算式!



解題的關鍵是正確的力學觀念，無法在解題講座上全部說清楚
還得靠平時的戰力養成!

感謝聆聽!!!

要學好力學，最好上現場課

馬上有人可問，不把問題帶回家!

練就取分離體的能力，突破指日可待!