

107 年土木工程普考試試題

類科：土木工程

科目：測量學概要

一、試繪圖及列出公式說明於已知 A 點(高程)以全測站儀(Total Station) 測量獲得未知 B 點高程之原理，並列出其誤差來源。(25 分)

【擬答】

1. 測站儀是整合電子經緯儀、電子測距儀、電子計算機、電子記錄器為一體的儀器。

(一)以全測站儀測量未知點高程之原理

已知：A 點為已知點，高程= H_a 。

B 點為未知點，高程= H_b 。

假設：

B 點較 A 點為高，由 A 點仰視觀測 B 點。

觀測量：

天頂距 Z 、斜距 S 、儀器高 i 、稜鏡高 t

當全測站儀定平後，二水準面之間的距離是相同的。

$$\therefore \Delta h + t = V + i \quad \Delta h = V + i - t$$

式中：A、B 二點高程差 $\Delta h = H_b - H_a$ 。高差 $V = S \times \cos Z$

$$\therefore H_b = H_a + S \times \cos Z + i - t$$

如 A、B 二點距離大於定值(例如：250m)，則須考慮兩差(地球曲率差、大氣折光差)

$$\text{兩差 } C_{E-R} = \frac{(1-k)D^2}{2R} \quad \text{水平距離 } D = S \times \sin Z$$

$$\therefore H_b = H_a + S \times \cos Z + i - t + (1-k) \frac{(S \times \sin Z)^2}{2R}$$

式中： k 為大氣折光係數， $k = 0.13$ 。 R ：地球半徑， $R = 6371$ 公里

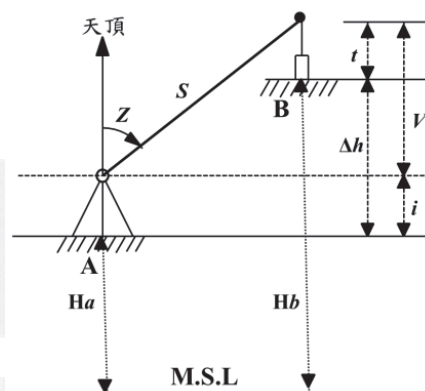
(二)誤差來源

全測站儀主要包含電子經緯儀、電子測距儀，其誤差來源如下：

1. 人為誤差

(1) 瞄準誤差：未能完全瞄準稜鏡中心。

(2) 對點(定心)誤差：全測站儀或稜鏡未能準確設置於測站或未知點。



(3) 定平誤差：全測站儀未能精確定評。

2. 儀器誤差

(1) 電子測距儀之儀器誤差：儀器常數誤差、測相誤差、調制頻率誤差、週期誤差。

(2) 電子經緯儀之儀器誤差：各主軸間之幾何關係，但直立軸誤差已由單軸或雙軸補償器獲得補償。

3. 自然誤差

(1) 大氣折射誤差：電磁波之傳播會受到傳播路線的氣象影響。

(2) 地球曲率之影響。

二、於二維平面直角坐標系統中，已知 A、B 二點之坐標分別為(100.00,20.00)、(100.00,120.00)(單位：m)，由 A、B 二點分別觀測得方位角、距離，試列出觀測方程式並計算 P 點之平面坐標，並說明以此方式測定點位有何缺失？(25 分)

【擬答】

(一) 列出觀測方程式並計算 P 點之平面坐標 (E_P, N_P) 如右圖，A、B 二點之 E 坐標相同，∴ 在垂直線上。

A、B 二點之距離 $\overline{AB} = 100m$

A、B 二點之方位角 $\phi_{AB} = 0^\circ$ ， $\phi_{BA} = 180^\circ$

∴ 方位角 $\phi_{AP} = 60^\circ 0' 0''$ ∴ P 點在 A、B 二點之右側

1. 由 B 點計算 P 點坐標：

$$\text{觀測方程式：} \begin{cases} E_P = E_B + \overline{BP} \times \sin \phi_{BP} \\ N_P = N_B + \overline{BP} \times \cos \phi_{BP} \end{cases}$$

$$\phi_{BP} = 180^\circ - \angle PBA \quad \angle PBA = 180^\circ - \phi_{AP} - \angle APB$$

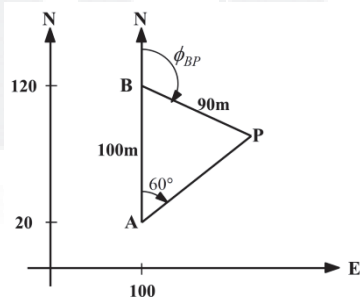
$$\triangle ABP \text{ 中，由正弦定律 } \frac{\overline{AB}}{\sin \angle APB} = \frac{\overline{BP}}{\sin \angle BAP} \quad \angle APB = \sin^{-1} \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} \times \sin \angle BAP \right)$$

2. 計算 P 點之平面坐標 (E_P, N_P)

$$\angle APB = \sin^{-1} \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} \times \sin \angle BAP \right) = \sin^{-1} \left(\frac{100}{90} \times \sin 60^\circ \right) = 74^\circ 12' 25''$$

$$\angle PBA = 180^\circ - 60^\circ - 74^\circ 12' 25'' = 45^\circ 47' 35''$$

$$\therefore B、P \text{ 二點之方位角 } \phi_{BP} = 180^\circ - \angle PBA = 180^\circ - 45^\circ 47' 35'' = 134^\circ 12' 25''$$



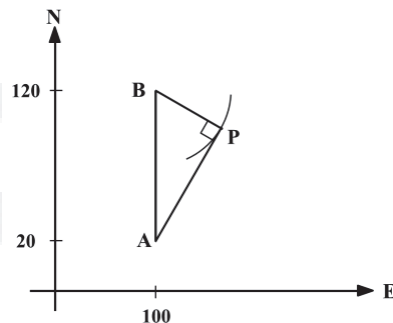
$$\begin{cases} E_P = 100 + 90 \times \sin 134^\circ 12' 25'' = 164.51m \\ N_P = 120 + 90 \times \cos 134^\circ 12' 25'' = 57.25m \end{cases}$$

$$\therefore (E_P, N_P) = (164.51m, 57.25m)$$

(二)以此方式測定點位之缺失：

此測定方法為偏角法，亦稱半導線法或交弧法。

如右圖，若 $\angle APB$ 接近 90° ，則以 B 點為圓心，以 $\overline{BP}$ 為半徑之圓弧，與 $\overrightarrow{AP}$ 射線，極可能在鄰近 P 點的位置，有二個交點而無法確認何者為正確的 P 點，因而誤差極大，應改用他法。



三、於二維平面直角坐標系統中，試繪圖說明由二個可通視的已知點中之一架設全站儀(TOTAL Station)利用光線法(導線法)測定新點之步驟與計算新點平面坐標之公式，並分析距離誤差及角度誤差於新點平面坐標誤差之影響。(25 分)

【擬答】

假設：A、B 點為二個可通視的已知點，其座標為 (E_A, N_A) 、 (E_B, N_B) C 點為新點（未知點），其座標為 (E_C, N_C) 在 A 點架全設站儀，並利用光線法（導線法）測定 C 點

(一)利用光線法（導線法）測定新點之步驟：

1. 架設全站儀於測站 A 點，進行定心、定平。
2. 輸入：儀器高、瞄準高、測站坐標 (E_A, N_A) 、後視點坐標 (E_B, N_B)
3. 照準後視點稜鏡。
4. 按一功能鍵，即可輸入方位角 ϕ_{AB} （由於已經輸入測站坐標、後視點坐標，儀器可自動計算方位角 ϕ_{AB} ）
5. 照準新點稜鏡，按一功能鍵，即可獲得新點坐標。因為在步驟(4)後，已經定向，即螢幕顯示的角度為方位角，又可測得距離，因而儀器可自動計算新點坐標。

(二)計算新點平面坐標之公式：

觀測量：A、C 二點之方位角 ϕ_{AC} ，AC 二點距離 $\overline{AC}$

$$\text{新點(C 點)平面坐標之計算公式} \begin{cases} E_C = E_A + \overline{AC} \times \sin \phi_{AC} \\ N_C = N_A + \overline{AC} \times \cos \phi_{AC} \end{cases}$$

(三)分析距離誤差及角度誤差於新點平面坐標誤差之影響：

觀測量：A、C 二點之方位角 $\varphi_{AC} \pm \sigma''_{\varphi_{AC}}$ ，AC 二點距離 $\overline{AC} \pm \sigma_{\overline{AC}}$

於 E 坐標之影響： $\because E_C = E_A + \overline{AC} \times \sin \varphi_{AC}$

$$\frac{\partial E_C}{\partial \overline{AC}} = \frac{\partial}{\partial \overline{AC}} (E_A + \overline{AC} \times \sin \varphi_{AC}) = \sin \varphi_{AC} \quad \frac{\partial E_C}{\partial \varphi_{AC}} = \overline{AC} \times \cos \varphi_{AC}$$

$$\sigma_{E_C} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial E_C}{\partial \overline{AC}} \right)^2 \times \sigma_{\overline{AC}}^2 + \left(\frac{\partial E_C}{\partial \varphi_{AC}} \right)^2 \times \left(\frac{\sigma''_{\varphi_{AC}}}{\rho''} \right)^2}$$

$$= \pm \sqrt{(\sin \varphi_{AC} \times \sigma_{\overline{AC}})^2 + \left(\overline{AC} \times \cos \varphi_{AC} \times \frac{\sigma''_{\varphi_{AC}}}{\rho''} \right)^2}$$

於 N 坐標之影響： $\because N_C = N_A + \overline{AC} \times \cos \varphi_{AC}$

$$\frac{\partial N_C}{\partial \overline{AC}} = \frac{\partial}{\partial \overline{AC}} (N_A + \overline{AC} \times \cos \varphi_{AC}) = \cos \varphi_{AC} \quad \frac{\partial N_C}{\partial \varphi_{AC}} = -\overline{AC} \times \sin \varphi_{AC}$$

$$\sigma_{N_C} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial N_C}{\partial \overline{AC}} \right)^2 \times \sigma_{\overline{AC}}^2 + \left(\frac{\partial N_C}{\partial \varphi_{AC}} \right)^2 \times \left(\frac{\sigma''_{\varphi_{AC}}}{\rho''} \right)^2}$$

$$= \pm \sqrt{(\cos \varphi_{AC} \times \sigma_{\overline{AC}})^2 + \left(-\overline{AC} \times \sin \varphi_{AC} \times \frac{\sigma''_{\varphi_{AC}}}{\rho''} \right)^2}$$

討論：若測距精度=測角精度，即 $\frac{\sigma_{\overline{AC}}}{\overline{AC}} = \frac{\sigma''_{\varphi_{AC}}}{\rho''}$ ，則

$$\sigma_{E_C} = \pm \sqrt{(\sin \varphi_{AC} \times \sigma_{\overline{AC}})^2 + \left(\overline{AC} \times \cos \varphi_{AC} \times \frac{\sigma''_{\varphi_{AC}}}{\rho''} \right)^2} = \pm \sqrt{(\sin \varphi_{AC} \times \sigma_{\overline{AC}})^2 + (\cos \varphi_{AC} \times \sigma_{\overline{AC}})^2}$$

$$= \pm \sigma_{\overline{AC}}$$

$$\sigma_{N_C} = \pm \sqrt{(\cos \varphi_{AC} \times \sigma_{\overline{AC}})^2 + \left(-\overline{AC} \times \sin \varphi_{AC} \times \frac{\sigma''_{\varphi_{AC}}}{\rho''} \right)^2}$$

$$= \sqrt{(\cos \varphi_{AC} \pm \sigma_{\overline{AC}})^2 + (-\sin \varphi_{AC} \times \sigma_{\overline{AC}})^2} = \pm \sigma_{\overline{AC}}$$

四、試說明全球定位系統(Global Positioning System, GPS)單點定位靜態測量之基本概念與計算地面點三維坐標之觀測方程式。(25 分)

【擬答】

(一)GPS 單點定位靜態測量之基本概念：

GPS 衛星提供不同之觀測量，其中以電碼距離為觀測量來定位，應用於導航定位 (即時定位) 方面，係以單獨一個觀測站接收訊號而得定位結果，稱為單點定位 (point positioning) 或絕對定位或導航定位。因此，單點定位是直接確定，觀測站相對於坐標系原點(地球質心)絕對坐標的一種定位方法。

GPS 單點定位靜態測量，基本上，是一種距離量測的定位方法。在定位過程中，視 GPS 衛星為位置已知的控制點，地面接收儀接收從 GPS 衛星所發射電磁波訊號，量測出地面接收儀到衛星之間的距離，以空間三段距離之後方交會原理，可計算出測站的位置坐標。

(二)計算地面點三維坐標之觀測方程式：

GPS 單點定位的基礎，即為空間距離之後方交會，為求取測站的空間坐標，只需三個獨立的距離觀測量，此時測站位於以三個衛星為球心，相對距離為半徑的三個球面交點。以空間三段距離後方交會原理，計算地面點三維坐標(U_X, U_Y, U_Z)之觀測方程式

如下：

$$(X_1 - U_X)^2 + (Y_1 - U_Y)^2 + (Z_1 - U_Z)^2 = R_1^2$$

$$(X_2 - U_X)^2 + (Y_2 - U_Y)^2 + (Z_2 - U_Z)^2 = R_2^2$$

$$(X_3 - U_X)^2 + (Y_3 - U_Y)^2 + (Z_3 - U_Z)^2 = R_3^2$$

式中： (X_1, Y_1, Z_1) 、 (X_2, Y_2, Z_2) 、 (X_3, Y_3, Z_3) ：第 1,2,3 顆衛星的坐標值(已知)

R_1, R_2, R_3 ：測站與第 1,2,3 顆衛星的距離(觀測值)

但由於地面接收儀所採用的石英鐘，與衛星的銻原子鐘之時間存有一個時錶誤差，必須同時加以求解，因此必須同時接收最少四顆衛星才能進行定位，計算地面點三維坐標之觀測方程式如下：

$$(X_1 - U_X)^2 + (Y_1 - U_Y)^2 + (Z_1 - U_Z)^2 = (R_1 - C_B)^2$$

$$(X_2 - U_X)^2 + (Y_2 - U_Y)^2 + (Z_2 - U_Z)^2 = (R_2 - C_B)^2$$

$$(X_3 - U_X)^2 + (Y_3 - U_Y)^2 + (Z_3 - U_Z)^2 = (R_3 - C_B)^2$$

$$(X_4 - U_X)^2 + (Y_4 - U_Y)^2 + (Z_4 - U_Z)^2 = (R_4 - C_B)^2$$

式中： C_B ：時錶誤差。