# 111 年普考土木工程 試題

等別：四等考試
類科：土木工程
科目：測量學概要

一、一條水準線的逐差水準測量往測 BM1 到 BM2 的高程差觀測值為 12.404 公尺，水準線長為 2.56 公里；返測 BM2 到 BM1 的高程差觀測值為-12.382 公尺，水準線長為 2.60 公里，試由這些數據計算往返測閉合差(往返測閉合差請以 a mm$\sqrt{K}$表示，K 係水準路線長，以公里計)，以及計算 BM2 到 BM1 高程差平均值。(高程差平均值計算到毫米，毫米以下四捨五入；a 須計算至小數以下 1 位) (25 分)

【考題難易】★★
【解題關鍵】關鍵字：逐差水準往返觀測。重點提要：閉合差、權與路線長成反比。
【命中特區】測量學課本 / 賴明 / 第三章水準測量之九、直接水準測量之誤差限制及平差計算

【擬答】：

已知：往測：高程差 $\Delta h_1$=12.404 m，水準線長度 $L_1$=2.56 km
返測：高程差 $\Delta h_2$= -12.382 m，水準線長度 $L_2$=2.60 km

(一) 閉合差

$$\omega=\Delta h_1+\Delta h_2=12.404+(-12.382)=0.022m=22mm$$

水準線總長度 $K= L_1+ L_2$=2.56+2.60=5.16 km

$$\because \omega=a^{mm}\sqrt{K} \quad , \quad a=\frac{\omega}{\sqrt{K}}=\frac{22}{\sqrt{5.16}}=9.7 \qquad \therefore \text{往返測閉合差}=9.7^{mm}\sqrt{K}$$

(二) 計算 BM2 到 BM1 高程差平均值

高程差 $\Delta h_1$、$\Delta h_2$ 的絕對值為 12.404m、12.382m

權與水準線長度成反比， $P\propto\frac{1}{L}$ 。 $P_1:P_2=\frac{1}{L_1}:\frac{1}{L_2}=L_2:L_1=2.60:2.56$

$$[P]=P_1+P_2=2.60+2.56=5.16$$

$$[P\cdot\Delta h]=2.60\times12.404+2.56\times12.382=63.94832$$

$$\text{高程差平均值 } \Delta\bar{h}=\frac{[P\cdot\Delta h]}{[P]}=\frac{63.94832}{5.16}=12.393m$$

二、試寫出平面三參數正交轉換、四參數相似轉換，以及六參數仿射轉換的公式，並試各舉一例說明應用這些轉換的時機。(25 分)

【考題難易】★★★★
【解題關鍵】關鍵字：三、四、六參數坐標轉換。重點提要：公式、應用時機。
【命中特區】測量學課本 / 賴明 / 第 6 節　平面坐標系之坐標轉換

【擬答】:

㈠ 三參數正交轉換、四參數相似轉換，以及六參數仿射轉換的公式

1. 三參數正交轉換的公式

假設：平面坐標系$(x_1,y_1)$，大地坐標系$(x_2,y_2)$

旋轉 $\beta$＋平移$(c,d)$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

2. 四參數相似轉換的公式

旋轉 $\beta$＋尺度改變 $s$＋平移$(c,d)$（四參數轉換　或　*Helmert* 轉換）

假設：平面坐標系$(x_1,y_1)$，大地坐標系$(x_2,y_2)$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x_2 = ax_1 + by_1 + c \\ y_2 = -bx_1 + ay_1 + d \end{cases}$$

3. 六參數仿射轉換的公式

(1) 說明：β：旋轉參數。$c_1,c_2$：平移參數。

δ：$x,y$ 並非正交（非直角座標系統）之夾角

$Sx$：$x_1$ 軸之尺度比參數。$Sy$：$y_1$ 軸之尺度比參數

(2) 考慮坐標軸非正交之效應（$x_1$'－$x_1$）

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \times \cos\delta \\ y_1' = y_1 \times \sin\delta \end{cases} \quad \text{設 δ 很小} \quad \cos\delta \approx 1 \quad \sin\delta \approx \delta$$

$$\therefore \begin{cases} x_1' = x_1 \\ y_1' = y_1 + \delta \times x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = M\delta \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

(3) 再考慮：平移（$c_1$、$c_2$），旋轉（β），尺度比（$Sx$ 對 $x_1$，$Sy$ 對 $y_1$）效應

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Sx\times x_1 \\ Sy\times y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = M_\beta M_\delta \begin{bmatrix} Sx\times x_1 \\ Sy\times y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$M = M_\beta M_\delta = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta - \delta\times\sin\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta + \delta\times\cos\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} Sx\times x_1 \\ Sy\times y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = Sx(\cos\beta - \delta\times\sin\beta) \qquad b_1 = -Sx\times\sin\beta$$

$$a_2 = Sy(\sin\beta + \delta\times\cos\beta) \qquad b_2 = Sy\times\cos\beta$$

(二) 轉換時機

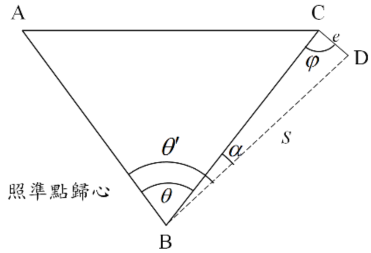
1. 三參數正交轉換的轉換時機
   (1) 二個坐標軸為正交。正交的坐標軸，轉換後仍維持正交。
   (2) 二個坐標軸的尺度比參數均相同
   (3) 有一個旋轉角度參數 $\theta$，以及一組平移坐標參數$(c,d)$
2. 四參數相似轉換的轉換時機
   (1) 二個已知點的局部坐標與大地坐標均已知，欲計算待求點(已知局部坐標)之大地坐標時。
   (2) 轉換前後的形狀維持不變，即角度維持不變。
   (3) 正交的坐標軸，轉換後仍維持正交。
   (4) 有一個旋轉角度參數 $\theta$，以及一組平移坐標參數$(c,d)$
   (5) 有一個比例參數 $S$，且雙軸的比例調整視為相同。
   (6) 為平面坐標轉換
3. 六參數仿射轉換的轉換時機
   (1) 二個坐標軸並非正交
   (2) 二個坐標軸的尺度比參數不一致

三、何謂雙距偏心測量?以此法求待定點坐標時，需要那些觀測量?並請說明應用此法如何計算待定點坐標?(25 分)

【考題難易】★★★★
【解題關鍵】關鍵字：偏心測量，雙距偏心測量。重點提要：觀測量，坐標計算。
【命中特區】測量學課本 / 賴明 / 第六章第 2 節 三角測量之五、偏心觀測及歸心計算

【擬答】：

㈠ 雙距偏心測量

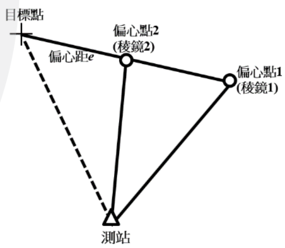



1. 照準點偏心觀測

觀測水平角時，照準點(目標點、待定點)應與標石中心在同一垂直線上；但因三角點之覘標日久之後，常會有偏離標石中心的情形發生；若在 B 觀測水平角時，C 點覘標位置偏移至 D 點，結果測得之角度為 θ'而非 θ，此時需量取偏心距 $e$ 及角度 $\phi$，則因 $\dfrac{e}{\sin x}=\dfrac{s}{\sin\phi}$，因為 $x$ 極小，$\sin x = x = \dfrac{x''}{\rho''}$ $\therefore x''=\rho''\times\dfrac{e}{s}\times\sin\phi$，

$\theta=\theta'-x$

2. 雙距偏心測量



雙距偏心測量示意圖

雙距偏心測量需要選擇兩個偏心點，兩個偏心點必須與目標點(照準點)位於同一直線上，如圖所示。

觀測時，先觀測偏心點 1，再觀測偏心點 2，最後再觀測偏心距(偏心距為偏心點 2 至目標點的距離 )。

根據偏心點 1 與偏心點 2 的觀測坐標，計算直線方位角，並由偏心距計算目標點的坐標。

㈡ 以此法求待定點座標時，所需要的觀測量

整置全站儀於測站，後視另一個控制點以標定方位，再採用輻射法(光線法)測得偏心點 1 與偏心點 2 的坐標，再由偏心距計算目標點(待求點)的平面坐標。

所需要的觀測量如下：

1. 觀測偏心點 1 之觀測量：測站到偏心點 1 之距離與方位角。
2. 觀測偏心點 2 之觀測量：測站到偏心點 2 之距離與方位角。
3. 偏心距 $e$：偏心點 2 至目標點(待求點)的距離。

㈢ 計算待定點坐標的方法

1. 假設：偏心點 1 與偏心點 2 的坐標，均由測站(已知點)採輻射法(光線法)計算而得，其坐標分別為：偏心點 1 $(E_1,N_1)$，偏心點 2 $(E_2,N_2)$。

2. 由偏心點 1 與偏心點 2 的坐標，計算方位角 $\phi_{12}$

⑴ 計算坐標差：$\Delta E_{12}=E_2-E_1$ 和 $\Delta N_{12}=N_2-N_1$。

⑵ 取坐標差的絕對值，計算初步的方位角 $\theta$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{|E_2-E_1|}{|N_2-N_1|}=\tan^{-1}\frac{|\Delta E_{12}|}{|\Delta N_{12}|}$$

⑶ 依據所在的象限，由下表計算方位角 $\phi_{AB}$

| 象限 | ΔE | ΔN | 方位角 $\phi_{12}$ |
|---|---|---|---|
| I | + | + | $\phi_{12}=\theta$ |
| II | + | − | $\phi_{12}=180^\circ-\theta$ |
| III | − | − | $\phi_{12}=180^\circ+\theta$ |
| IV | − | + | $\phi_{12}=360^\circ-\theta$ |

3. 偏心點 2 至目標點(待求點)的方位角=$\phi_{12}$

4. 由偏心點 2 的坐標$(E_2,N_2)$，偏心距 $e$，計算目標點(待求點)的坐標$(E,N)$

$$\begin{cases}E=E_2+e\times\sin\phi_{12}\\N=N_2+e\times\cos\phi_{12}\end{cases}$$

四、如圖所示，量測兩個長方形 E 和 F 的四個邊長，長度分別為 a、b、c 和 d，其量測標準差分別為 3σ、2σ、σ 和 σ。假設所有觀測量均獨立不相關，試計算這兩個長方形 E 和 F 面積的標準差及其相關係數。(25 分)

【考題難易】★★★★

【解題關鍵】關鍵字：多變量函數之誤差傳播定律，相關係數。

重點提要：先進行偏微分，再進行矩陣運算。矩陣為對稱矩陣。

【命中特區】測量學補充講義 / 賴明 / 測量平差法精要，第一章 多變量函數之誤差傳播。

【擬答】：

已知：標準差：$\sigma_a=\pm 3\sigma$ ，$\sigma_b=\pm 2\sigma$ ，$\sigma_c=\sigma_d=\pm\sigma$ ，

變方：$\sigma_a^2=9\sigma^2$ ，$\sigma_b^2=4\sigma^2$ ，$\sigma_c^2=\sigma_d^2=\sigma^2$

假設：長方形 $E$ 之面積為 $X$，長方形 $F$ 之面積為 $Y$

$$\begin{cases}X=(a-d)\cdot(b+c)\\ Y=c\cdot d\end{cases}，\frac{\partial X}{\partial a}=b+c，\frac{\partial X}{\partial b}=a-d，\frac{\partial X}{\partial c}=a-d，\frac{\partial X}{\partial d}=-(b+c)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial a}=0，\frac{\partial Y}{\partial b}=0，\frac{\partial Y}{\partial c}=d，\frac{\partial Y}{\partial d}=c$$

由多變量函數之誤差傳播定律

$$\begin{bmatrix}\sigma_X^2 & \sigma_{XY}\\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial X}{\partial a} & \frac{\partial X}{\partial b} & \frac{\partial X}{\partial c} & \frac{\partial X}{\partial d}\\ \frac{\partial Y}{\partial a} & \frac{\partial Y}{\partial b} & \frac{\partial Y}{\partial c} & \frac{\partial Y}{\partial d}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\sigma_a^2 & & & \\ & \sigma_b^2 & & \\ & & \sigma_c^2 & \\ & & & \sigma_d^2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\frac{\partial X}{\partial a} & \frac{\partial Y}{\partial a}\\ \frac{\partial X}{\partial b} & \frac{\partial Y}{\partial b}\\ \frac{\partial X}{\partial c} & \frac{\partial Y}{\partial c}\\ \frac{\partial X}{\partial d} & \frac{\partial Y}{\partial d}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}b+c & a-d & a-d & -(b+c)\\ 0 & 0 & d & c\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}9\sigma^2 & & & \\ & 4\sigma^2 & & \\ & & \sigma^2 & \\ & & & \sigma^2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}b+c & 0\\ a-d & 0\\ a-d & d\\ -(b+c) & c\end{bmatrix}$$

$$=\sigma^2\times\begin{bmatrix}9(b+c) & 4(a-d) & a-d & -(b+c)\\ 0 & 0 & d & c\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}b+c & 0\\ a-d & 0\\ a-d & d\\ -(b+c) & c\end{bmatrix}$$

$$=\sigma^2\begin{bmatrix}9(b+c)^2+4(a-d)^2+(a-d)^2+(b+c)^2 & d\cdot(a-d)-c\cdot(b+c)\\ d\cdot(a-d)-c\cdot(b+c) & c^2+d^2\end{bmatrix}$$

$\therefore\ \sigma_X^2=\sigma^2\times\left[10\cdot(b+c)^2+5(a-d)^2\right]$，

長方形 $E$ 面積的標準差 $\sigma_X=\pm\sigma\cdot\sqrt{10(b+c)^2+5(a-d)^2}$

$\sigma_Y^2=\sigma^2\cdot(c^2+d^2)$，長方形 $F$ 面積的標準差 $\sigma_Y=\pm\sigma\cdot\sqrt{c^2+d^2}$ ，

$\sigma_{XY}=\pm\sigma\cdot\left[d(a-d)-c(b+c)\right]$

相關係數 $\rho_{XY}=\dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}=\dfrac{d(a-d)-c(b+c)}{\sqrt{10(b+c)^2+5(a-d)^2}\times\sqrt{c^2+d^2}}$